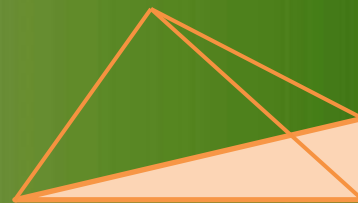
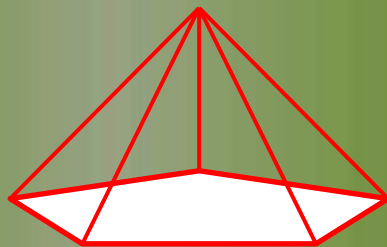
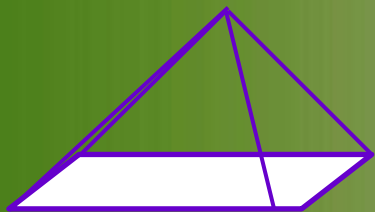


คณิตศาสตร์ ม.3

พื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด



ครูปรีชา สุกักคณากุล

พีระมิด คือ ทรงสามมิติที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยมใดๆ มี
ยอดแหลมซึ่งไม่อยู่บนระนาบเดียวกับฐานและหน้าทุก
หน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดร่วมกัน



พีระมิด
สี่เหลี่ยมผืนผ้า



พีระมิด
หกเหลี่ยม



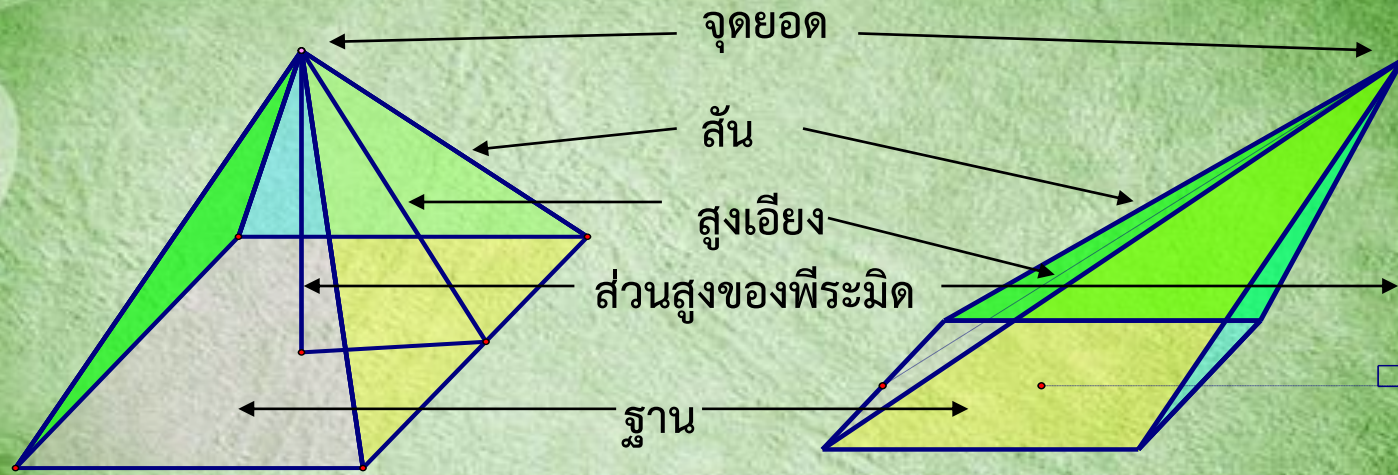
พีระมิด
สามเหลี่ยม



พีระมิด
ห้าเหลี่ยม

พีระมิดตรง หมายถึง พีระมิดที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยมด้าน
เท่ามุมเท่า มีสันยาวเท่ากันทุกเส้น จะมีสูงเอียงทุกเส้น
ยาวเท่ากัน และส่วนสูงตั้งฉากกับฐานที่จุดซึ่งอยู่ห่างจาก
จุดยอดมุมของรูปเหลี่ยมที่เป็นฐานเป็นระยะเท่ากัน มี
หน้าทุกหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ส่วนกรณีที่สันทุก
สันยาวไม่เท่ากัน สูงเอียงทุกเส้นยาวไม่เท่ากัน
เรียกว่า พีระมิดเอียง

ส่วนต่าง ๆ ของพีระมิต



การหาพื้นที่ผิวของพีระมิด

พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้างทุกหน้า

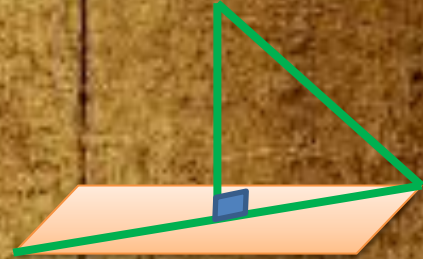
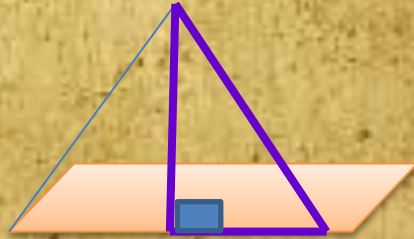
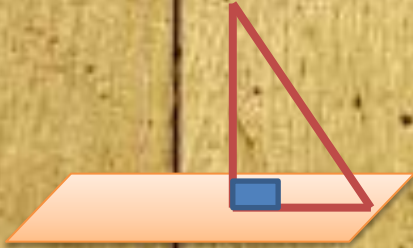
หรือ พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวเอียง

กรณีที่เป็นพีระมิดฐานเป็นรูปเหลี่ยมด้านเท่า

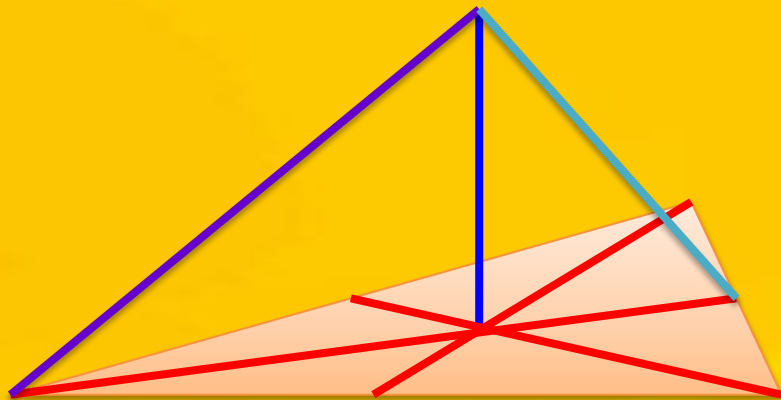
พื้นที่ผิวข้าง = $\frac{1}{2} \times$ ความยาวรอบฐาน $\times$ สูงเอียง



ความสัมพันธ์ของสูง , สูงเอียง และเส้น ของพีระมิดฐาน
สี่เหลี่ยม

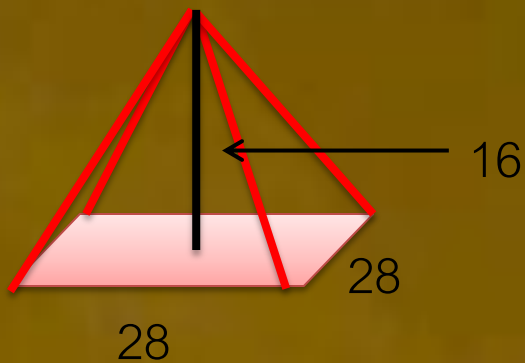


กรณีที่ฐานเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

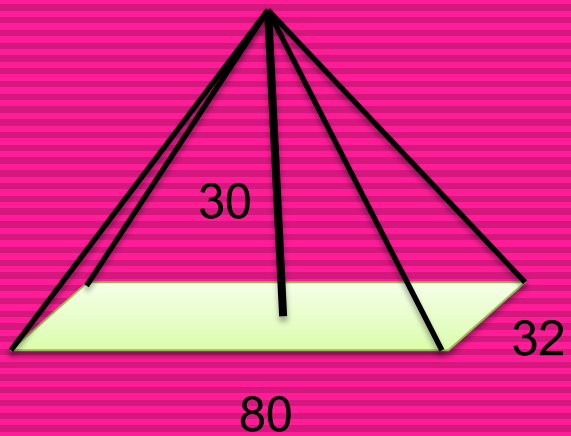


ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ผิวของพีระมิดต่อไปนี้

1.



2.





ปริมาตรของพีระมิด = $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$

ตัวอย่าง พีระมิดแห่งหนึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ยาวด้านละ 6 เมตร สูงเอียง 5 เมตร และสูงตรง 4 เมตร

จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของพีระมิดตรงฐานสี่เหลี่ยม
จัตุรัส ที่มีด้านฐานยาวด้านละ 14 เซนติเมตร สูงเอียง
ยาว 25 เซนติเมตร



1. พีระมิดฐานหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีฐานยาวด้านละ 10 เซนติเมตร ล้นพีระมิดยาว 13 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวข้างของพีระมิด

2. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีฐานยาวด้านละ 10 เซนติเมตร สันยาว 13 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวของพีระมิด

3. พีระมิดตรงฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 12 ซม. มีสูง
เอียงยาว 10 ซม. จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด



4. ขนมหี้นมีรูปทรงเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ยาวด้านละ 5 เซนติเมตร สูง 3 เซนติเมตร จำนวน 120
ห่อ จะมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

5. พีระมิดฐานสามเหลี่ยมมีปริมาตร 96 ลบ.ม. และมีพื้นที่ฐาน 24 ตร.ม. จงหาความสูงของพีระมิด

6. พีระมิดฐานสามเหลี่ยมด้านเท่าสูง 12 นิ้ว มีปริมาตร
เท่ากับ $36\sqrt{3}$ ลบ.นิ้ว มีความยาวรอบฐานกี่นิ้ว

7. พีระมิดตรงฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีด้านที่ฐานยาว 6 ซม.
และสูงตรง 4 ซม. จะมีเส้นยาวกี่ซม.

8. พีระมิดฐานหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีเส้นรอบรูปยาว 36 ซม. และสั้นยาว 5 ซม. มีพื้นที่ผิวที่เท่าไรตารางเซนติเมตร

9. พืระมิตฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีพื้นที่ฐาน 36 ตร.ซม.
และมีปริมาตร 72 ลบ.ซม. มีพื้นที่ผิวข้างเท่าใด

10. พีระมิดตรงตัดปลาย ฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 6 ซม. หลังจากตัดปลายแล้วพีระมิดสูง 4 ซม. และมีความกว้างของด้านบนยาวด้านละ 3 ซม. พีระมิดตัดปลายมีปริมาตรเท่าใด

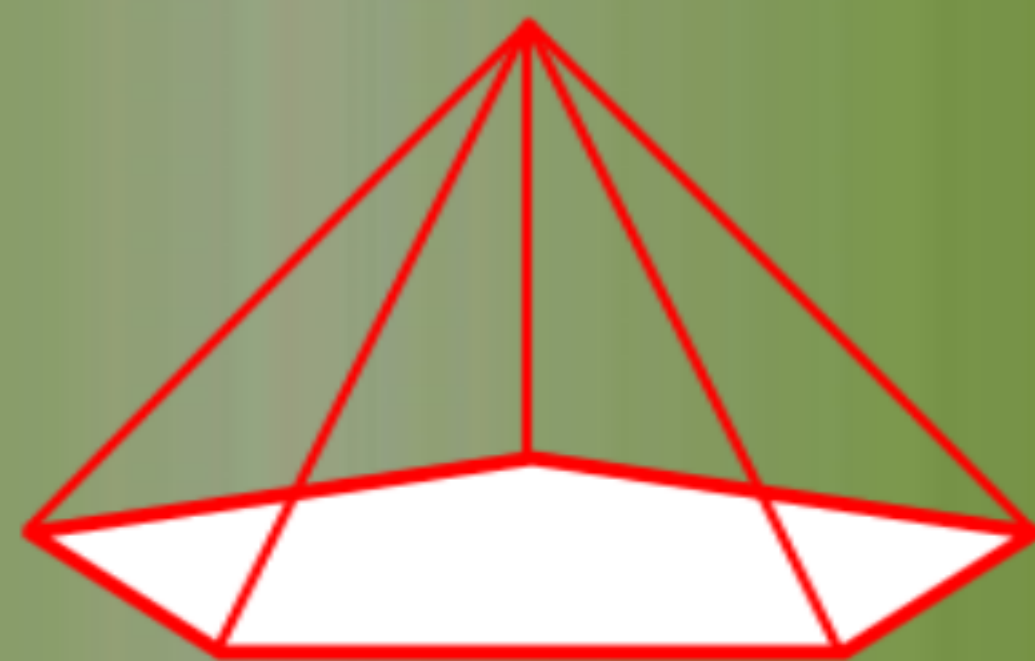
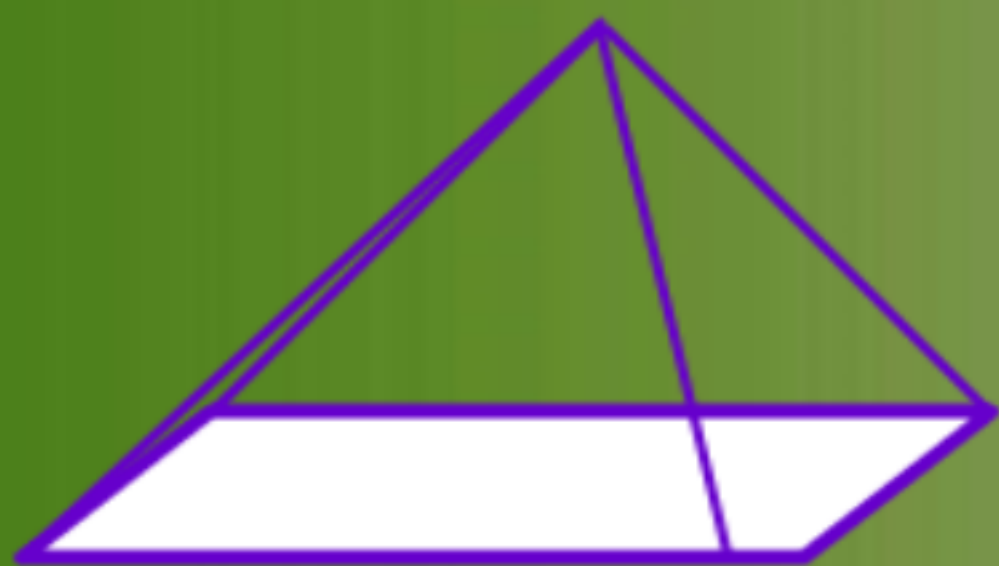
11. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีฐานกว้าง 6 ซม. ยาว 8 ซม. และมีส่วนสูงยาวเท่ากับเส้นทแยงมุมของฐาน มีปริมาตรเท่าใด

12. พีระมิดฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีฐานยาวด้านละ 14 หน่วย และมีส้นยาว 25 หน่วย มีพื้นที่ผิวข้างเท่าใด



คณิตศาสตร์ ม.3

พื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด



ครูปรีชา สุกัญจนากุล

พีระมิด คือ ทรงสามมิติที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยมใดๆ มี
ยอดแหลมซึ่งไม่อยู่บนระนาบเดียวกับฐานและหน้าทุก
หน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดร่วมกัน



พีระมิด
สี่เหลี่ยมผืนผ้า



พีระมิด
หกเหลี่ยม



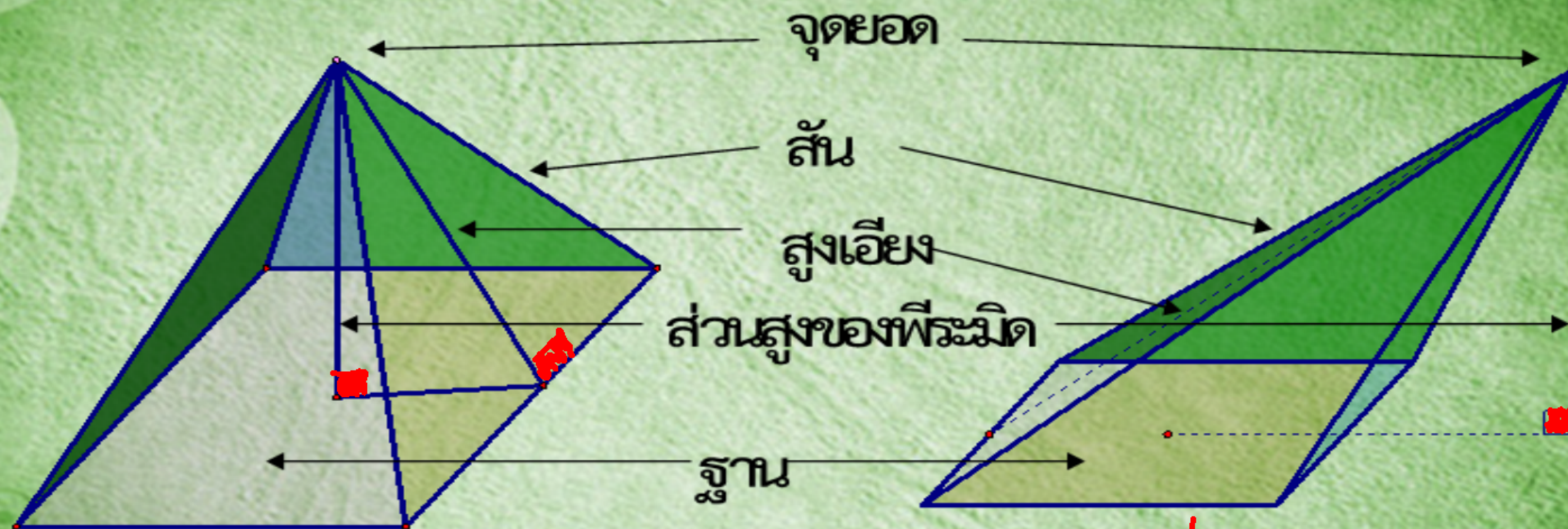
พีระมิด
สามเหลี่ยม



พีระมิด
ห้าเหลี่ยม

พีระมิดตรง หมายถึง พีระมิดที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยมด้าน
เท่ามุมเท่า มีสันยาวเท่ากันทุกเส้น จะมีสูงเอียงทุกเส้น
ยาวเท่ากัน และส่วนสูงตั้งฉากกับฐานที่จุดซึ่งอยู่ห่างจาก
จุดยอดมุมของรูปเหลี่ยมที่เป็นฐานเป็นระยะเท่ากัน มี
หน้าทุกหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ส่วนกรณีที่มีสันทุก
สันยาวไม่เท่ากัน สูงเอียงทุกเส้นยาวไม่เท่ากัน
เรียกว่า พีระมิดเอียง

ส่วนต่าง ๆ ของพีระมิด



พีระมิดตรง

พีระมิดเอียง

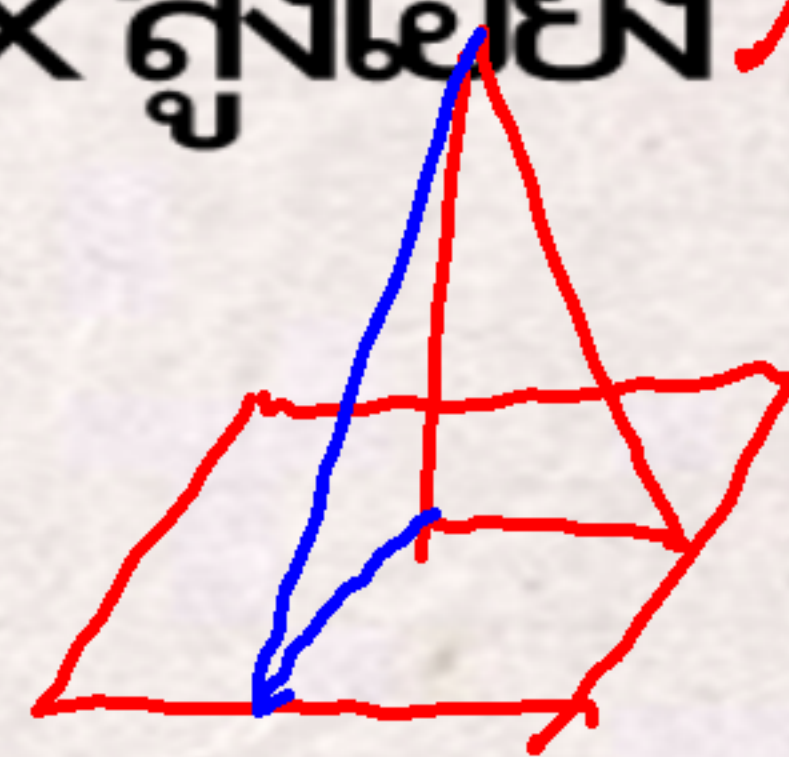
การหาพื้นที่ผิวของพีระมิด

พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้างทุกหน้า

หรือ พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวเอียง

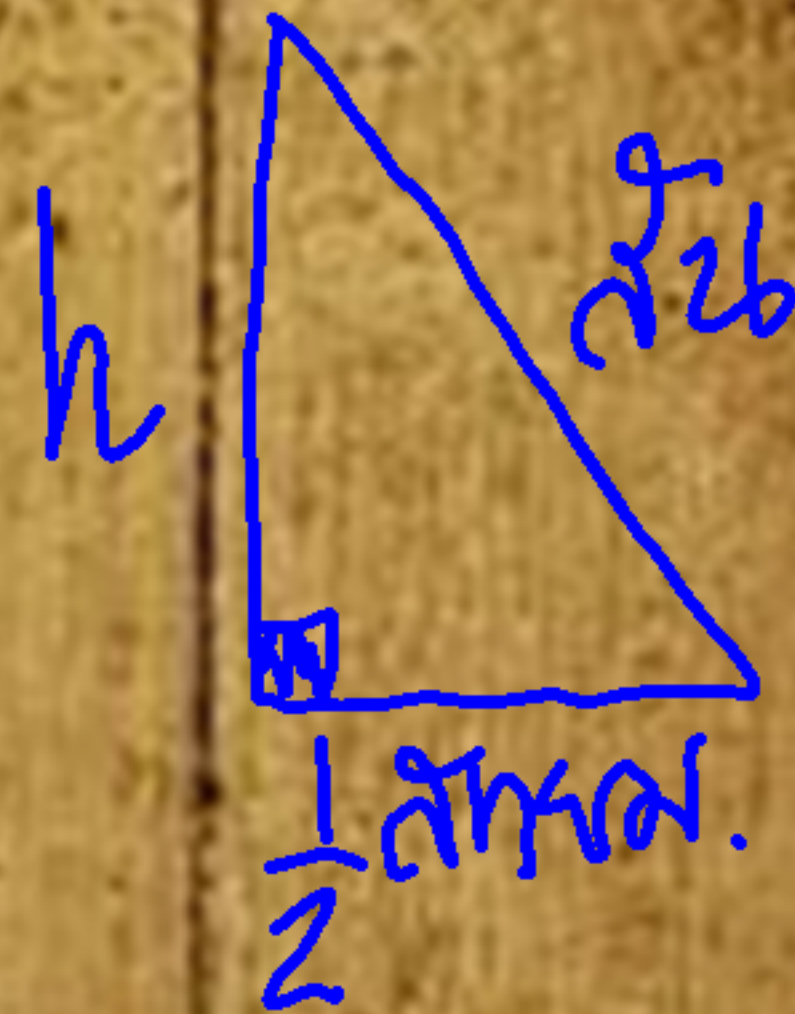
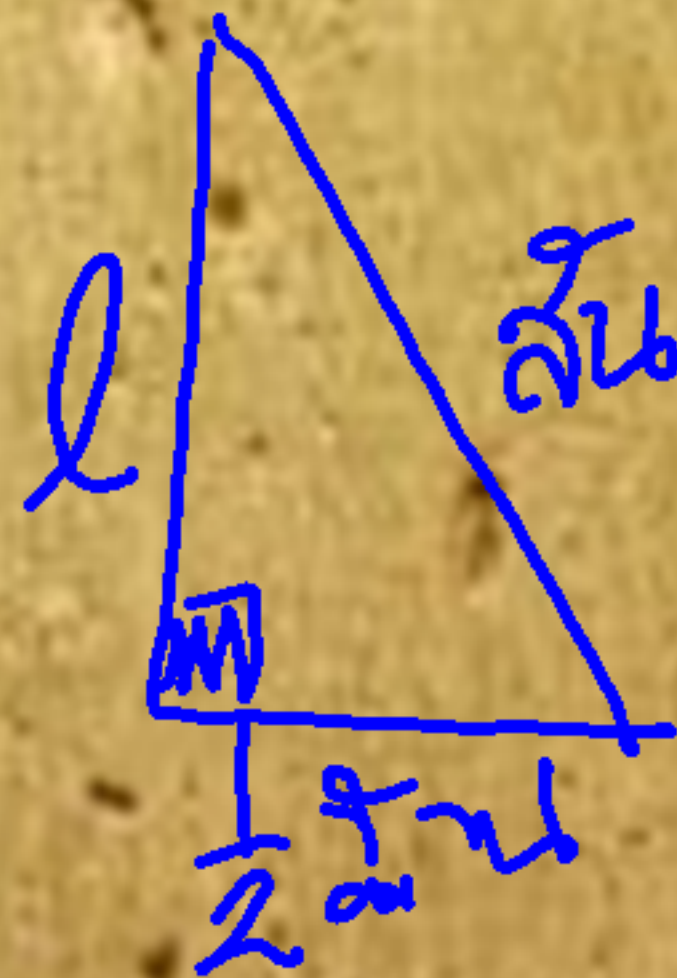
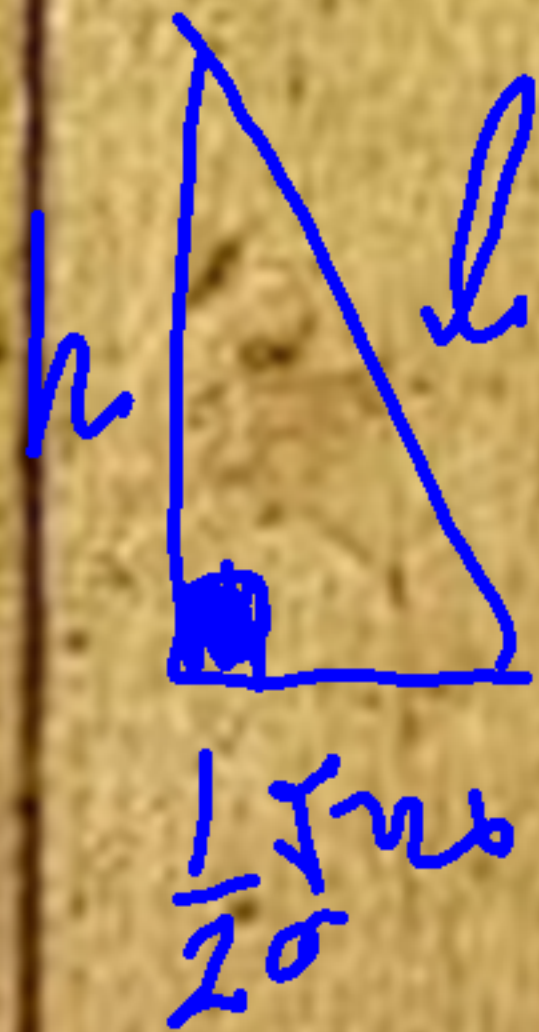
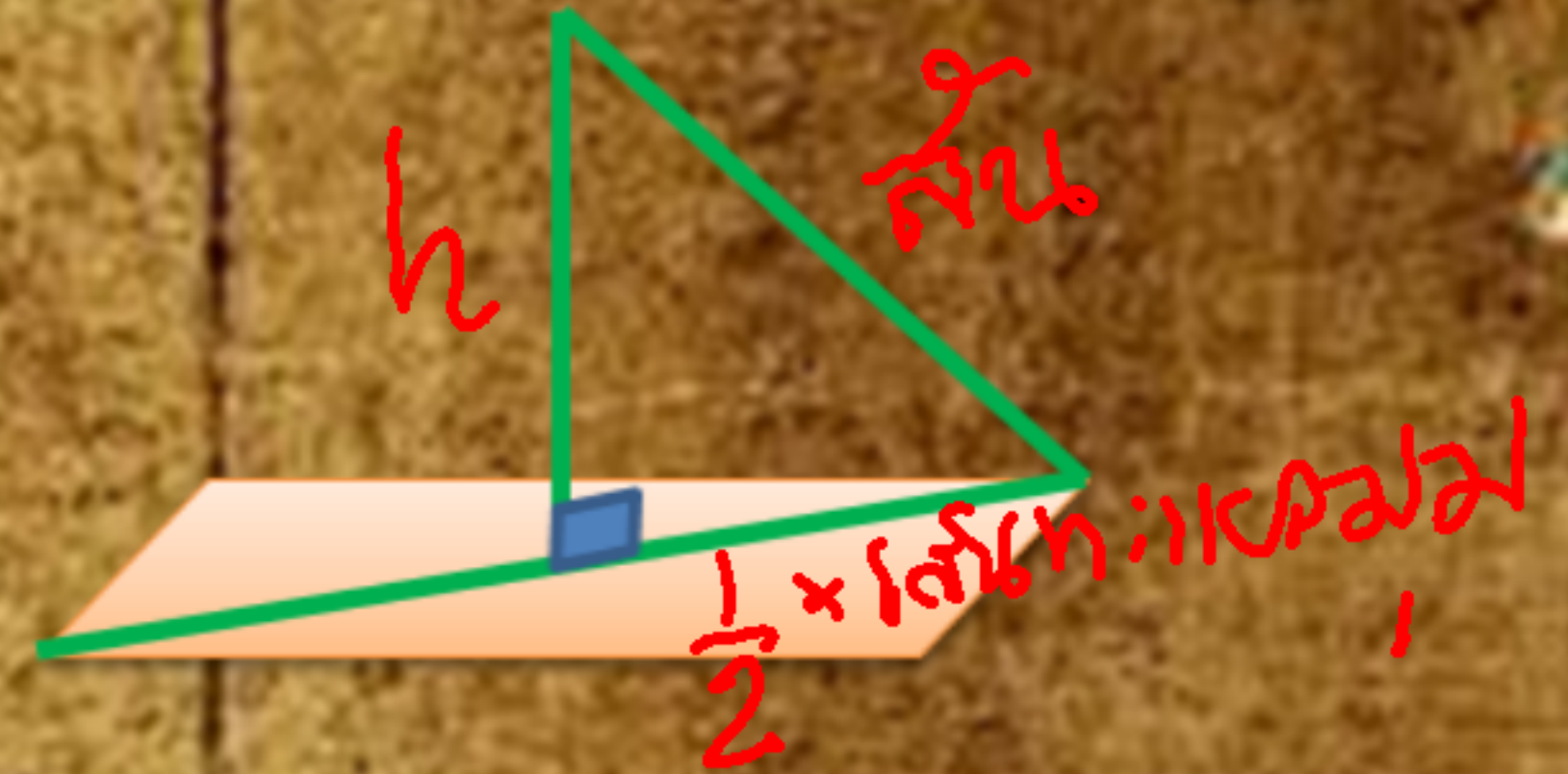
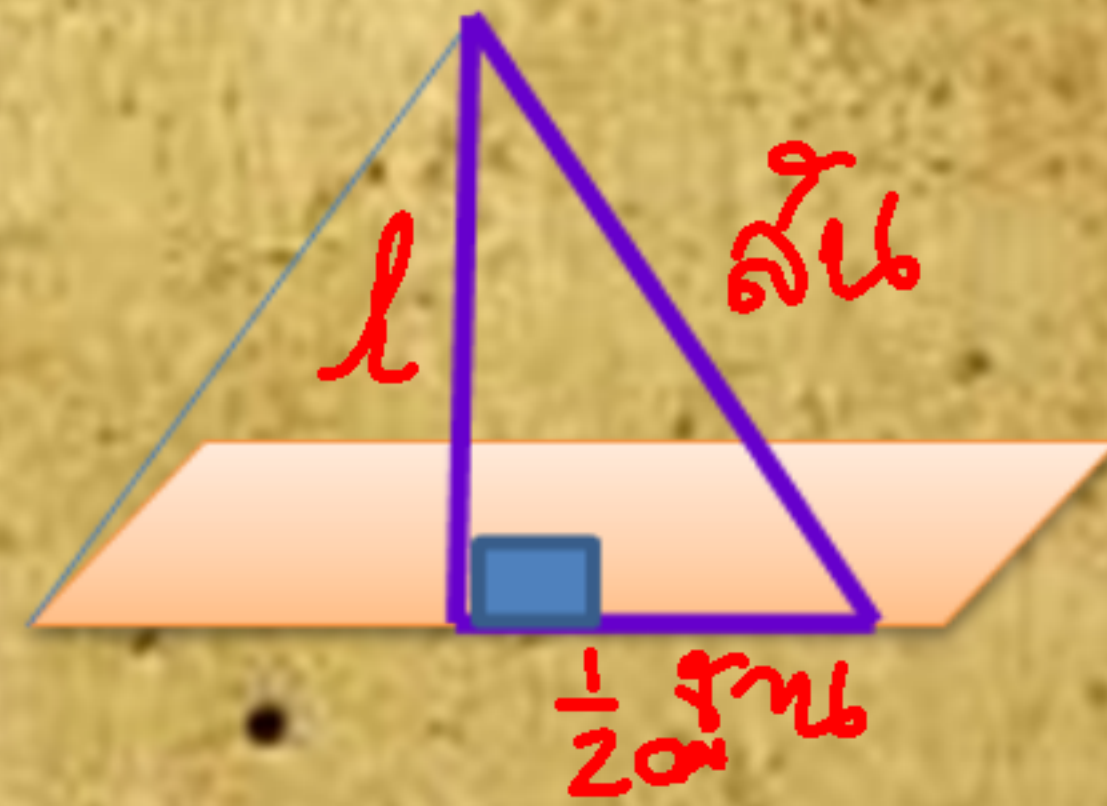
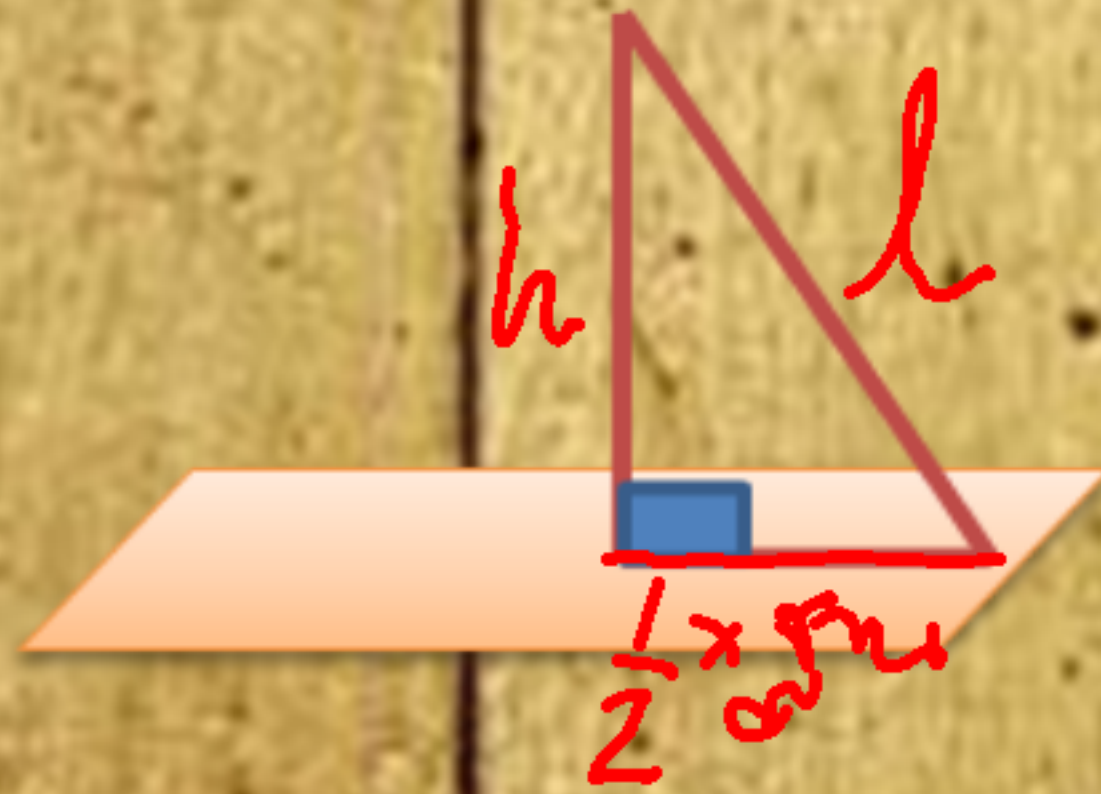
กรณีที่เป็นพีระมิดฐานเป็นรูปเหลี่ยมด้านเท่า

พื้นที่ผิวข้าง = $\frac{1}{2} \times \text{ความยาวรอบฐาน} \times \text{สูงเอียง}$

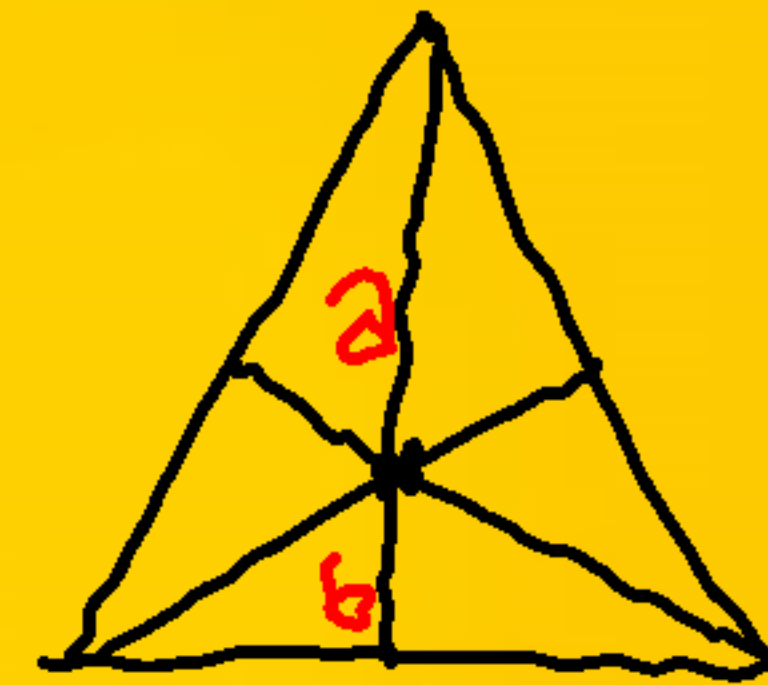
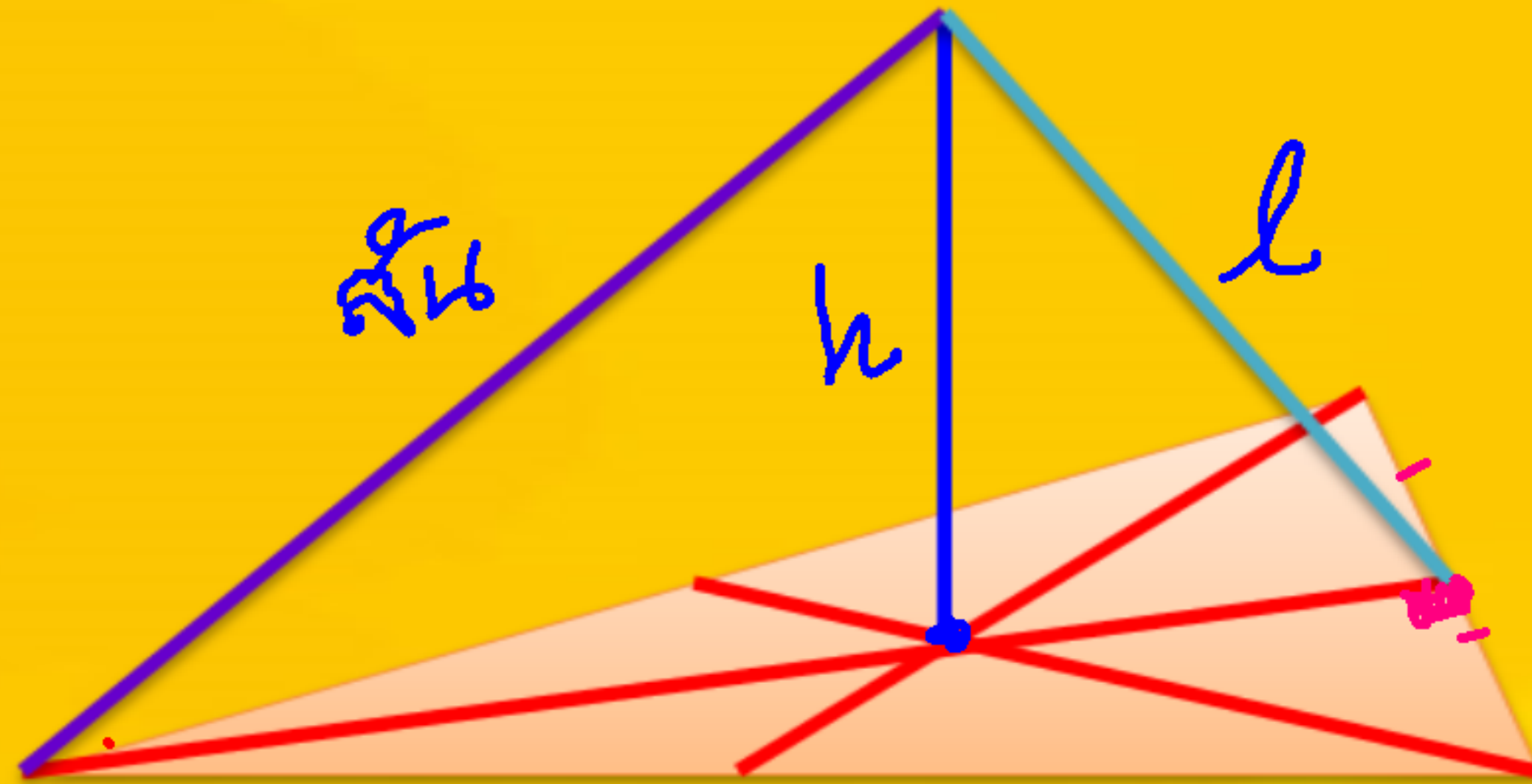


ความสัมพันธ์ของสูง , สูงเอียง และฐาน ของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม

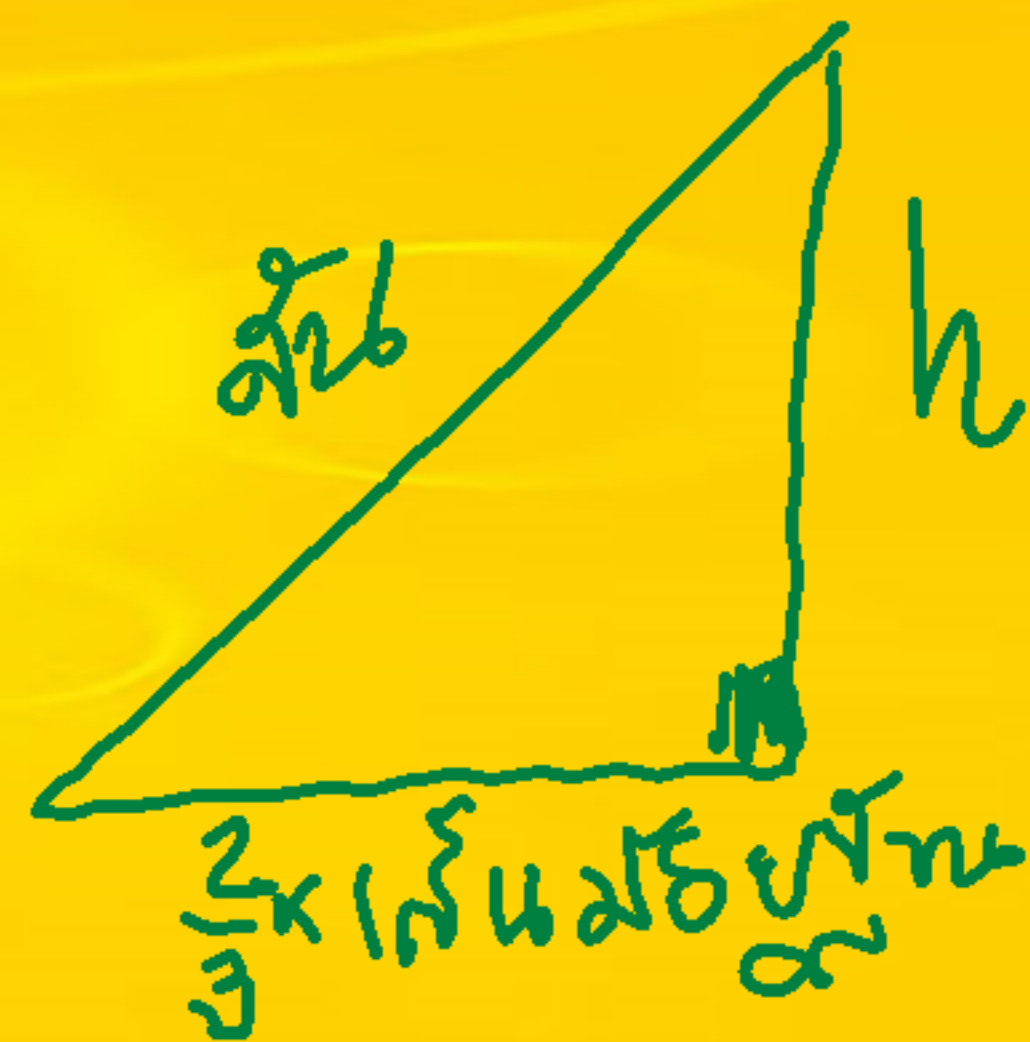
* ใช้ได้ทุกกรณี



กรณีพื้นฐานเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า เส้นมัธยฐาน = $\frac{\sqrt{3}}{2} a$

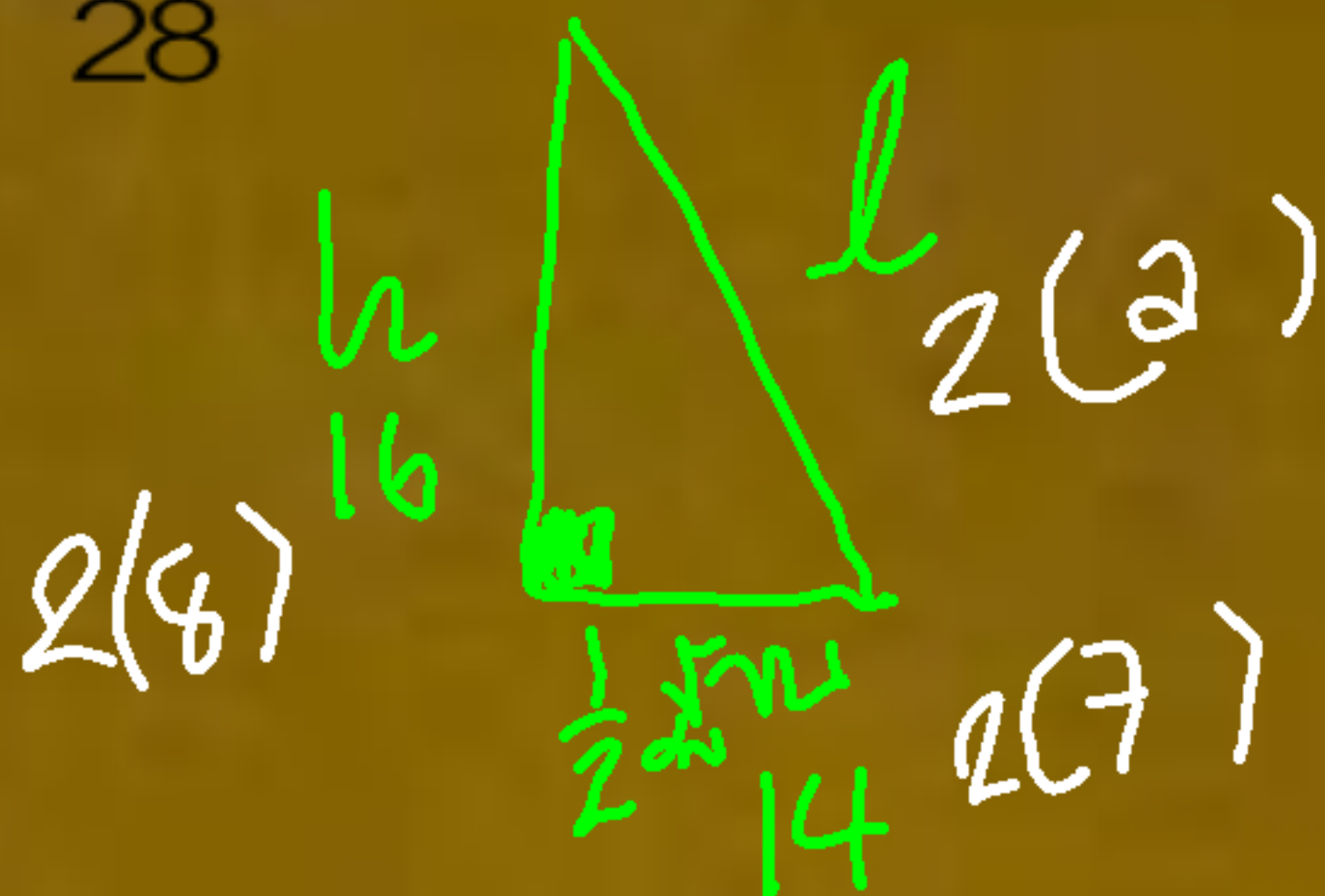
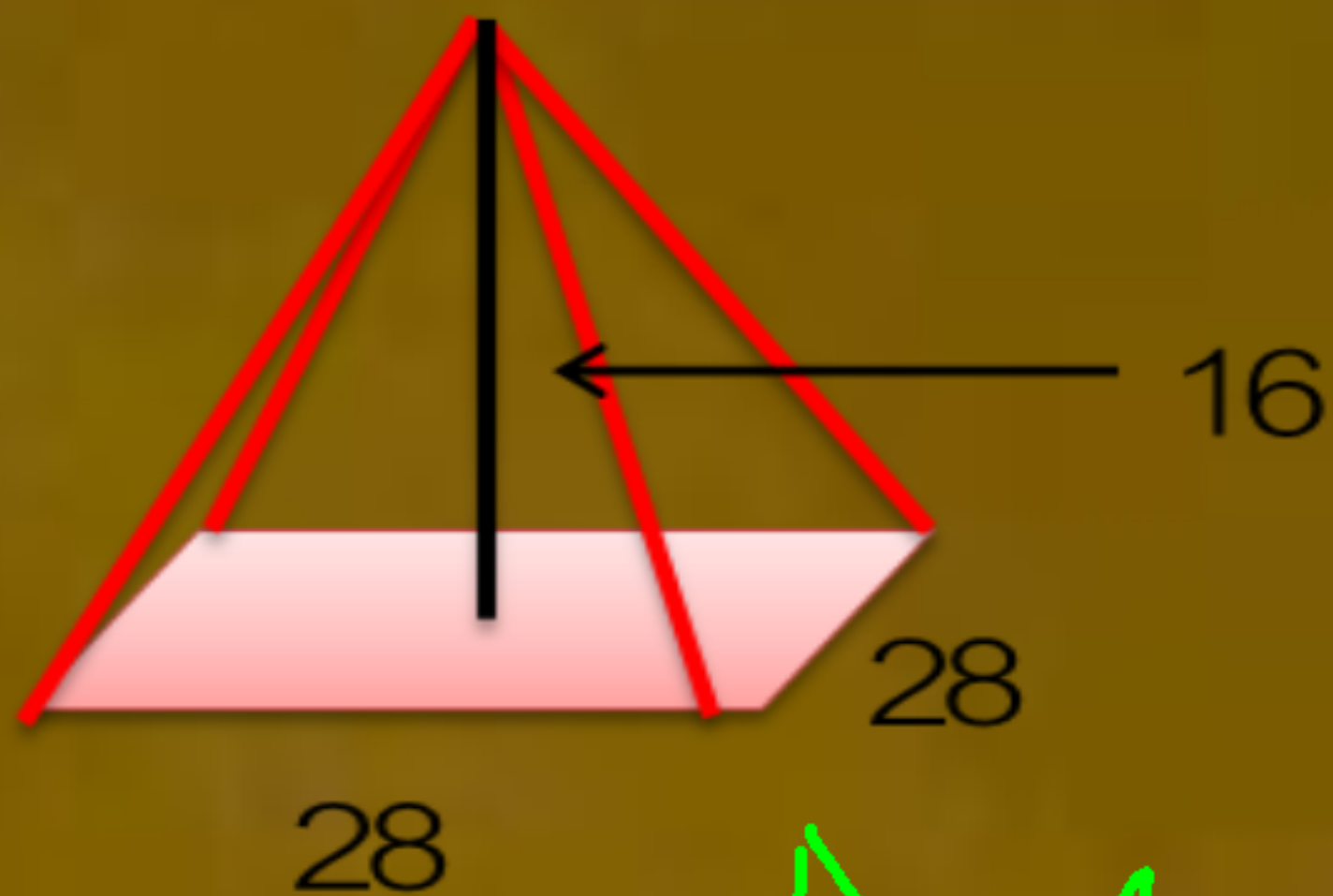


$$a:b = 2:1$$



ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ผิวของพีระมิดต่อไปนี้

1.



$$\text{พ.ท.ผิว} = \text{ผิวฐาน} + \text{ผิวข้าง}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{รอบฐาน} \times l + \text{ฐาน} \times \text{ด้าน}$$

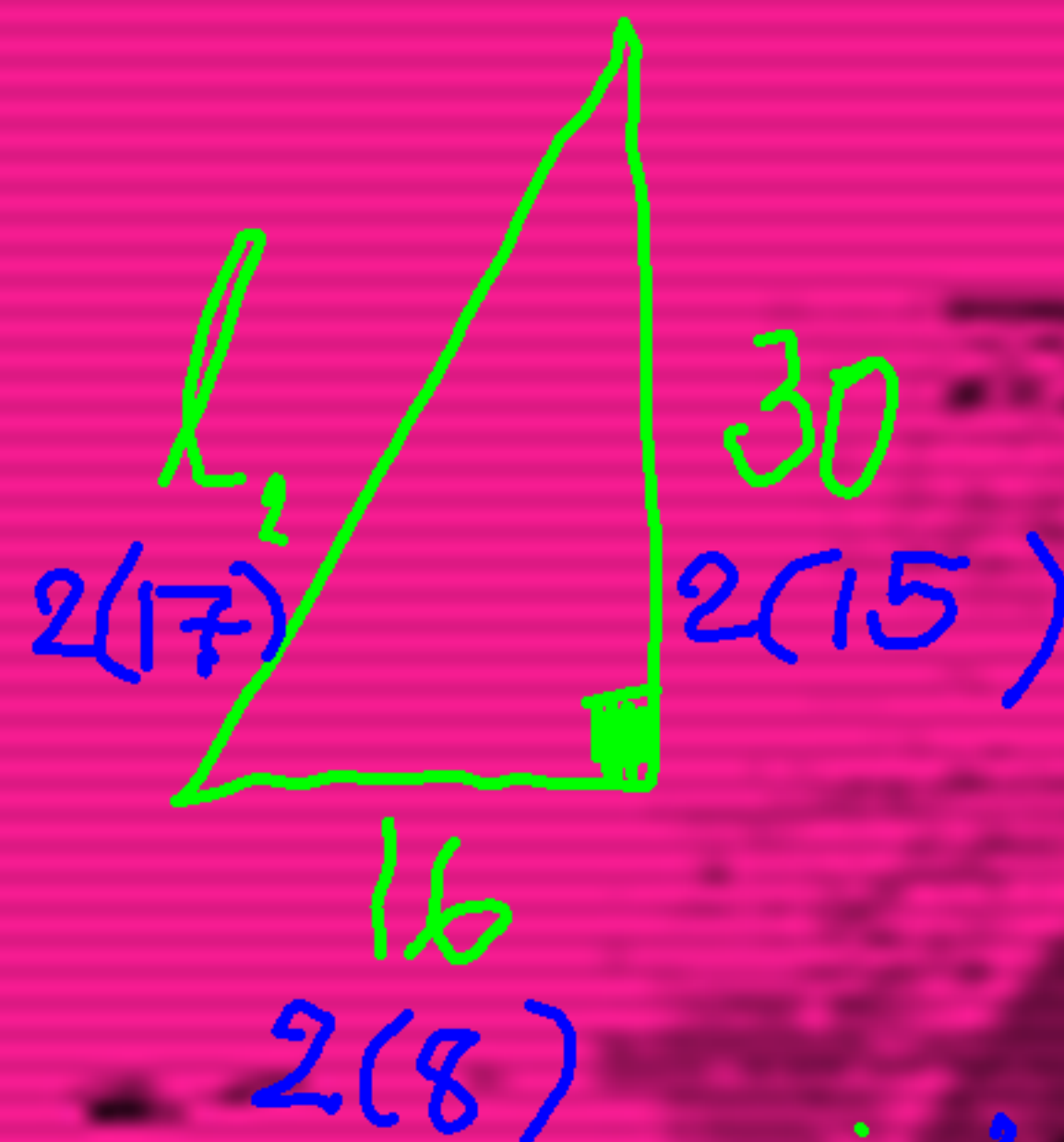
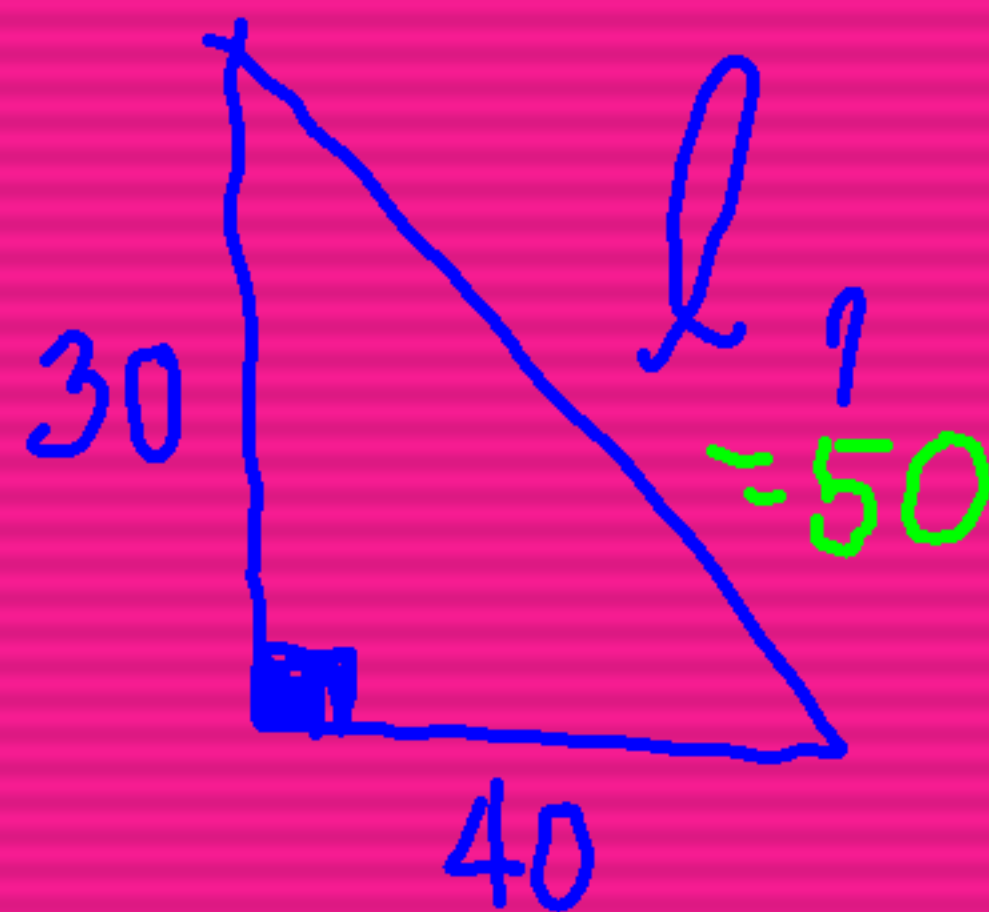
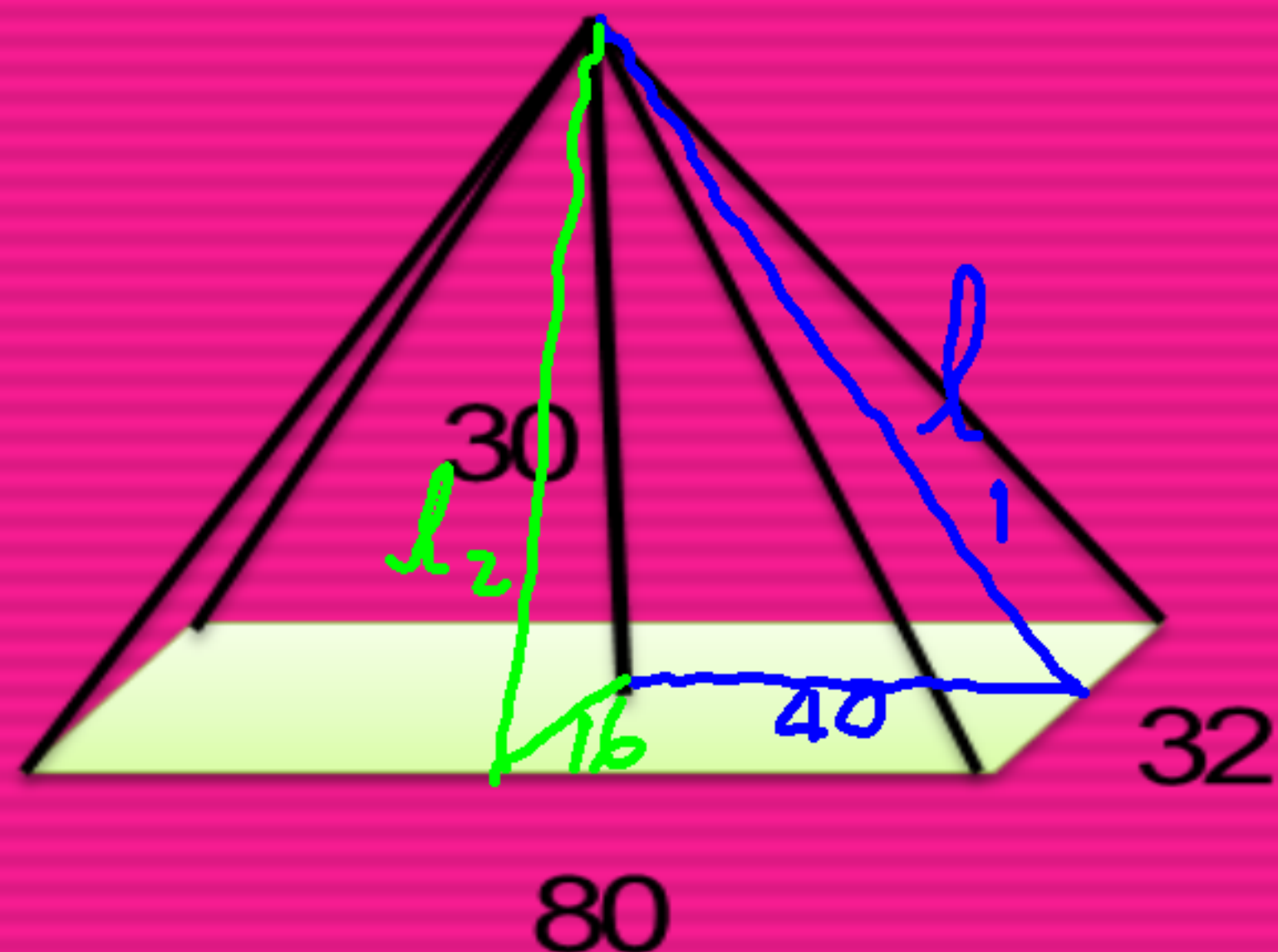
$$= \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 28 \times 2\sqrt{113} \right) + (28 \times 28)$$

$$= 112\sqrt{113} + 784 \text{ ตร.ม.}$$

$$a^2 = 8^2 + 7^2$$

$$a = \sqrt{113}$$

2.



$$\begin{aligned} \text{พ.ท.ผิวข้าง} &= (\Delta \text{หน้า} + \Delta \text{ข้าง}) + (\Delta \text{ข้าง} + \Delta \text{ข้าง}) \\ &= 2\left(\frac{1}{2} \times 80 \times 34\right) + 2\left(\frac{1}{2} \times 32 \times 50\right) \\ &= 2720 + 1600 = 4320 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4320 \\ &+ \\ &2560 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{พ.ท.ผิว} = \text{ผิว} + \text{ผิว} = 4320 + (32 \times 80) = 6880 \text{ มส.ผิว}$$

Gros

Chloé



ปริมาตรของพีระมิด = $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$

ตัวอย่าง พีระมิดแห่งหนึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ยาวด้านละ 6 เมตร สูงเอียง 5 เมตร และสูงตรง 4 เมตร

จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด

$$\text{พ.ทผิว} = \text{ข้าง} + \text{ฐาน}$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times \text{ฐาน} \times 1 + \text{ด้าน} \times \text{ด้าน}$$

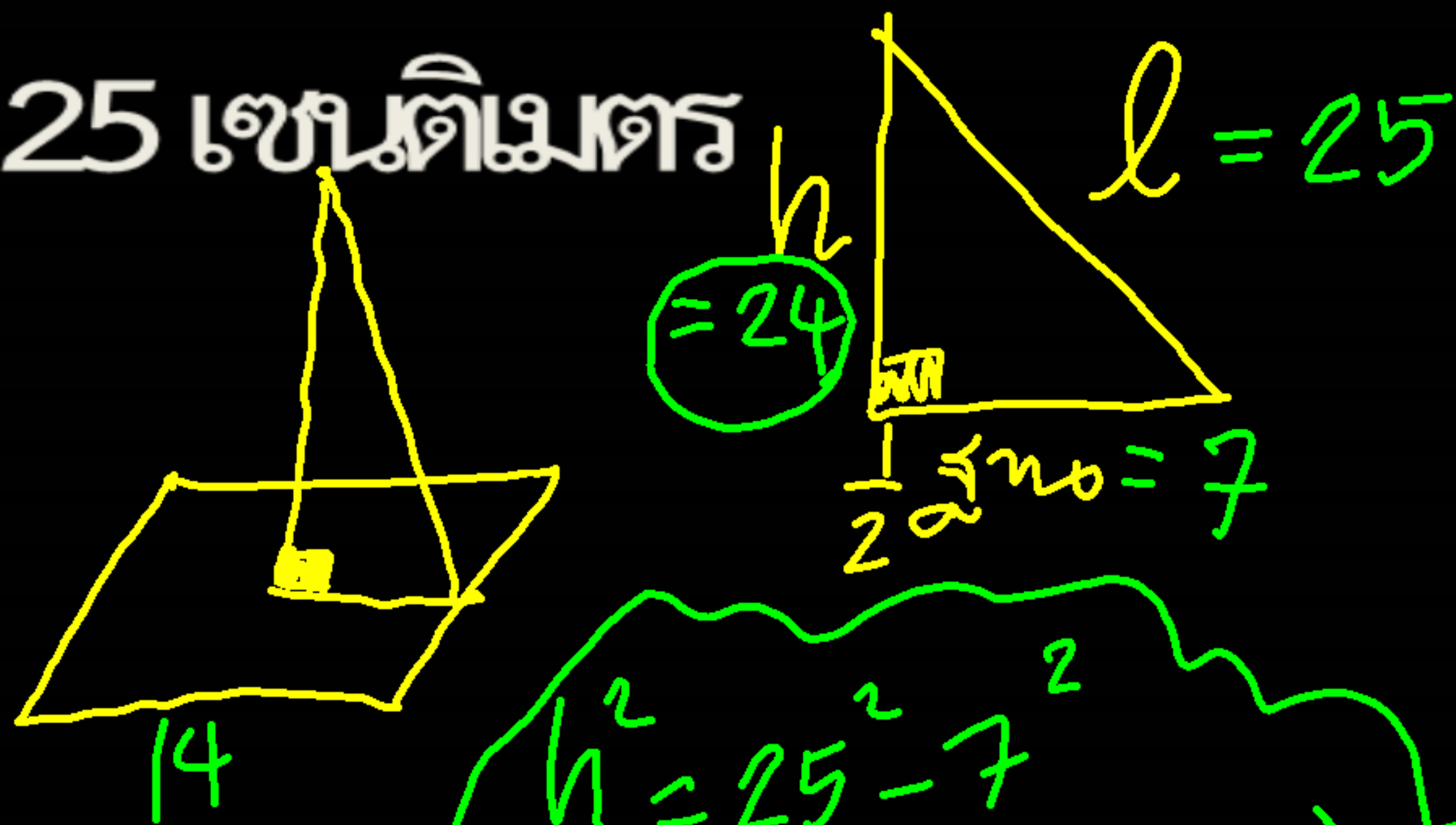
$$= \frac{1}{2} \times 24 \times 5 + 36 = 96 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} Ah \\ &= \frac{1}{3} \times 36 \times 4 \\ &= 48 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของพีระมิดตรงฐานสี่เหลี่ยม

จัตุรัส ที่มีด้านฐานยาวด้านละ 14 เซนติเมตร สูงเอียง 25

ยาว 25 เซนติเมตร



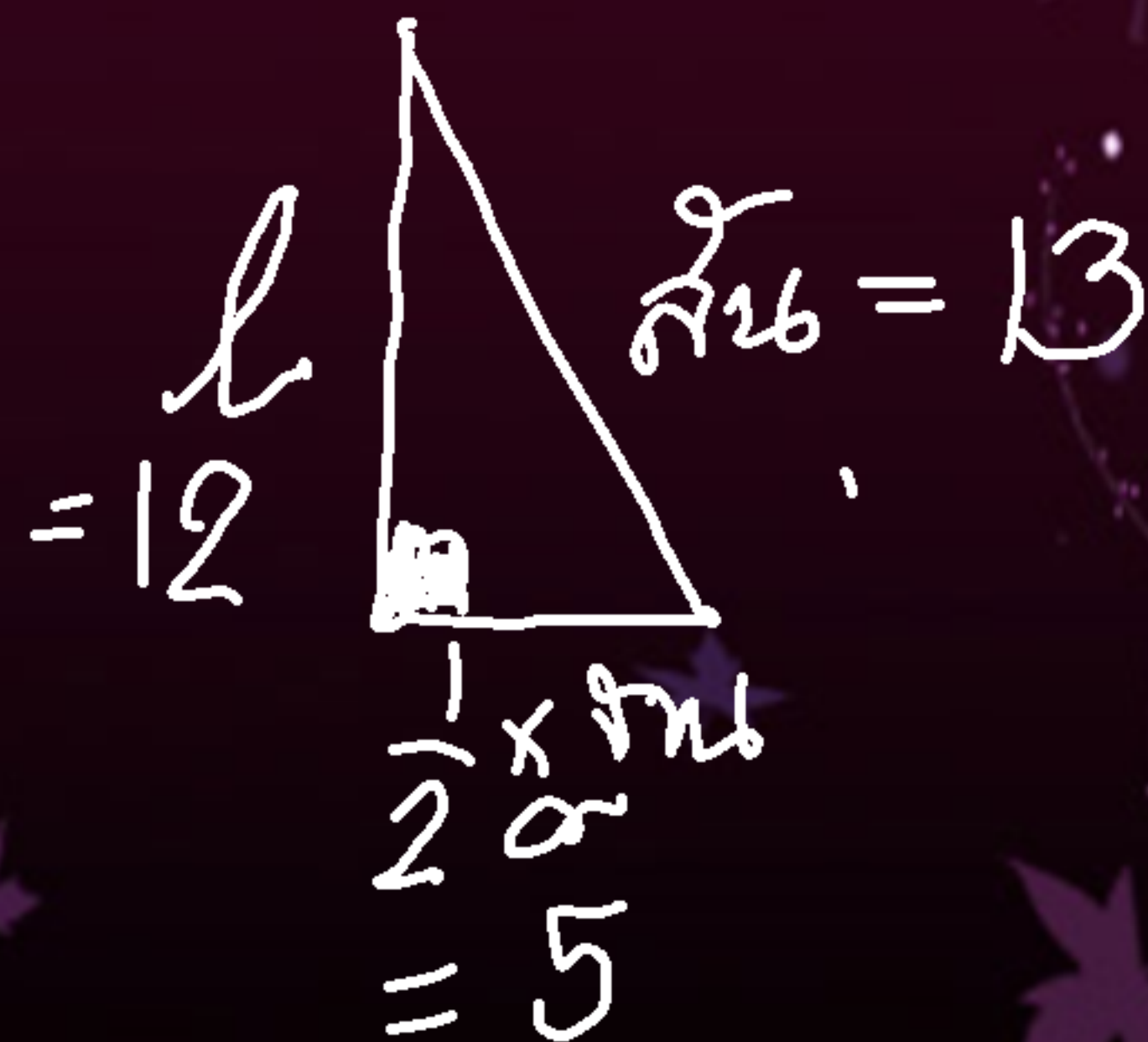
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} Ah \\ &= \frac{1}{3} \times 14 \times 14 \times 24 \\ &= 1568 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^2 &= 25^2 - 7^2 \\ &= (25-7)(25+7) \\ &= 18 \times 32 \\ &= 9 \times 2 \times 2 \times 16 \rightarrow h = 3 \times 2 \times 4 \end{aligned}$$

1. พีระมิดฐานหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีฐานยาวด้านละ 10 เซนติเมตร ล้นพีระมิดยาว 13 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวข้างของพีระมิด



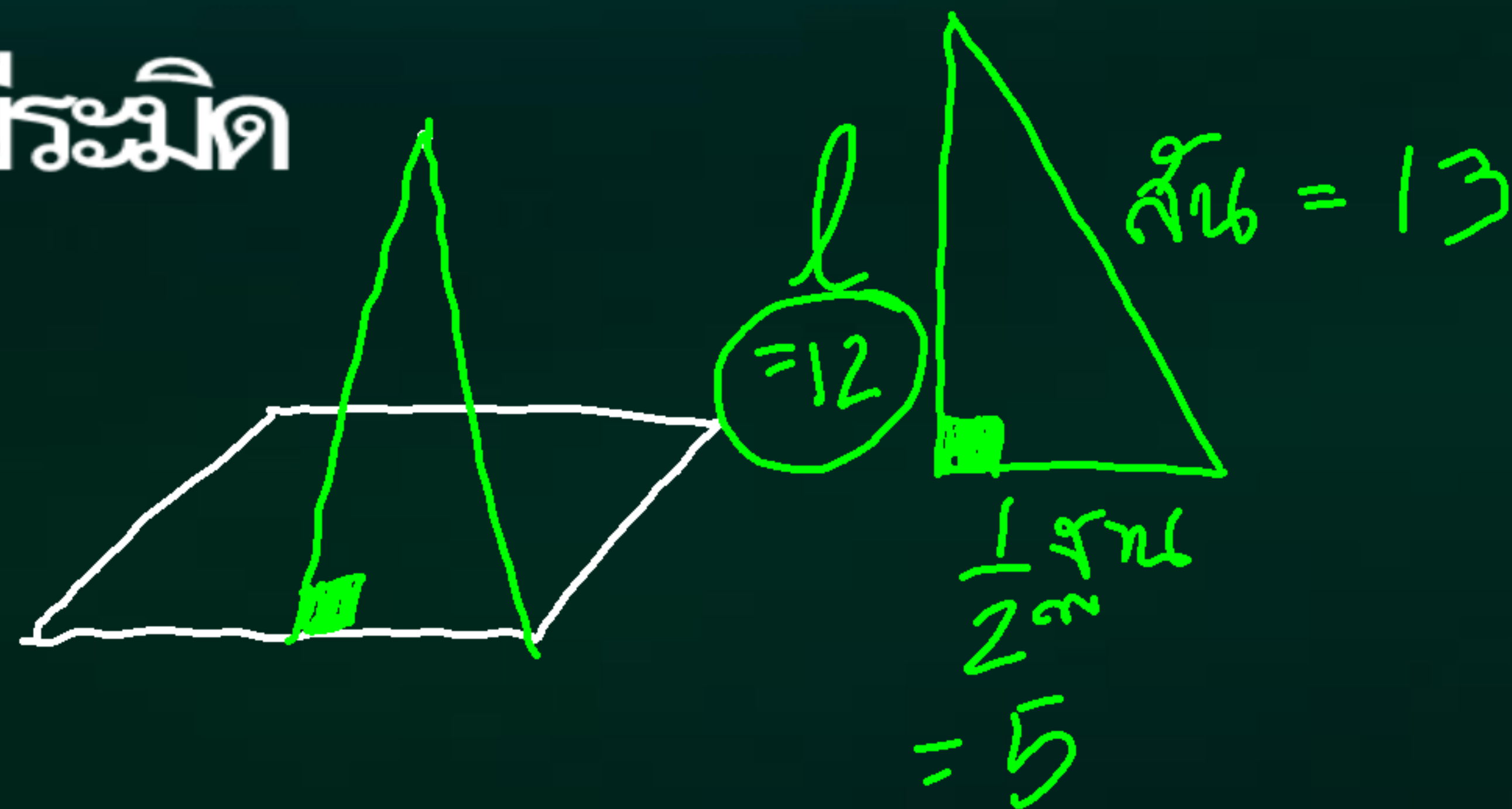
$$\begin{aligned}
 \text{พ.ท. ผิวข้าง} &= \frac{1}{2} \times 50 \text{ ฐาน} \times l \\
 &= \frac{1}{2} \times 6 \times 10^5 \times 12 \\
 &= 360 \text{ ๓5,๖๗.}
 \end{aligned}$$



2. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีฐานยาวด้านละ 10

เซนติเมตร ล้นยาว 13 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวของ

พีระมิด



$$\text{พ.ทผิว} = \text{ข้าง} + \text{ฐาน}$$

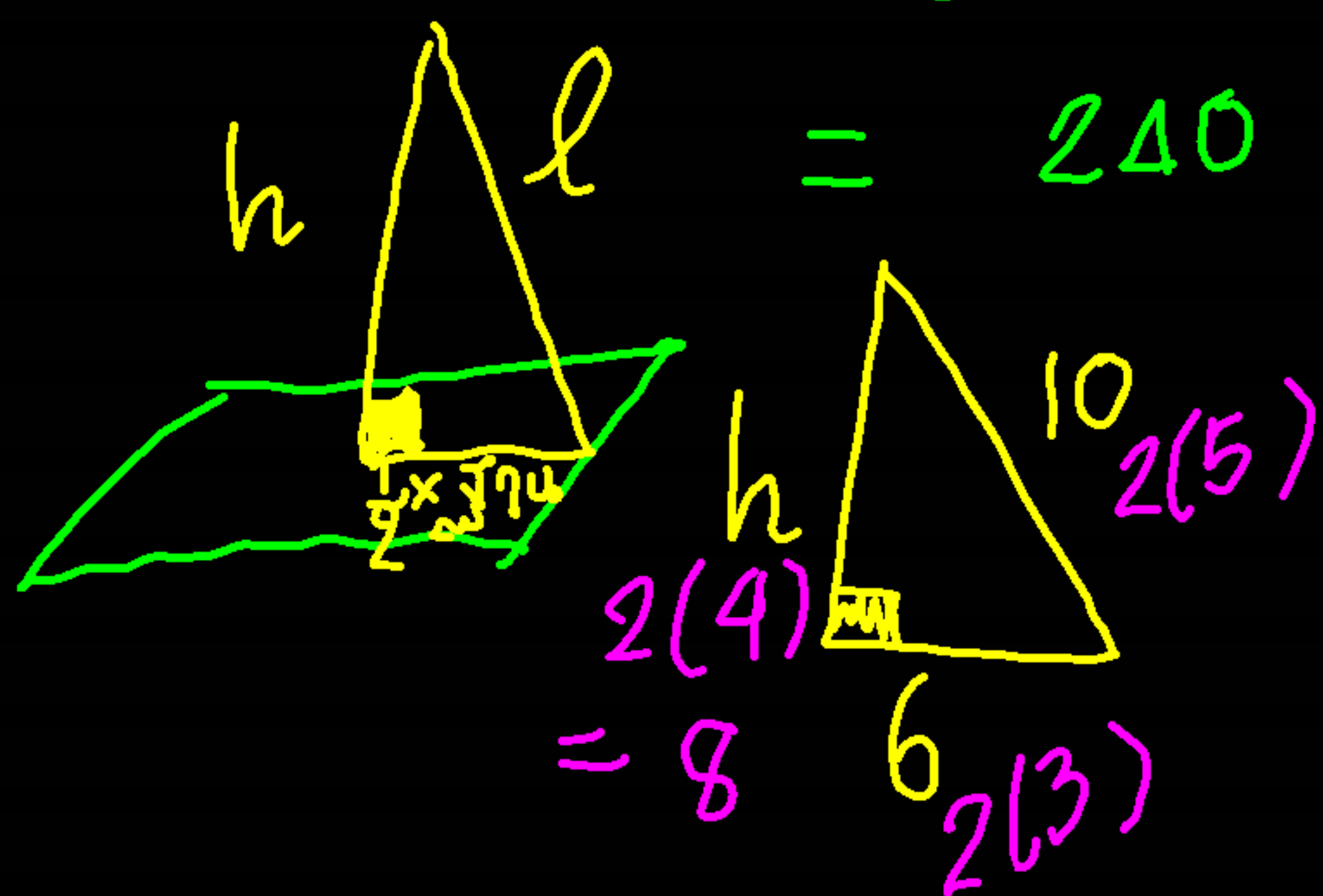
$$= \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 10 \times 12 \right) + 100$$

$$= 240 + 100$$

$$= 340 \text{ cm}^2$$

3. พีระมิดทรงฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 12 ซม. มีสูง
เอียงยาว 10 ซม. จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด

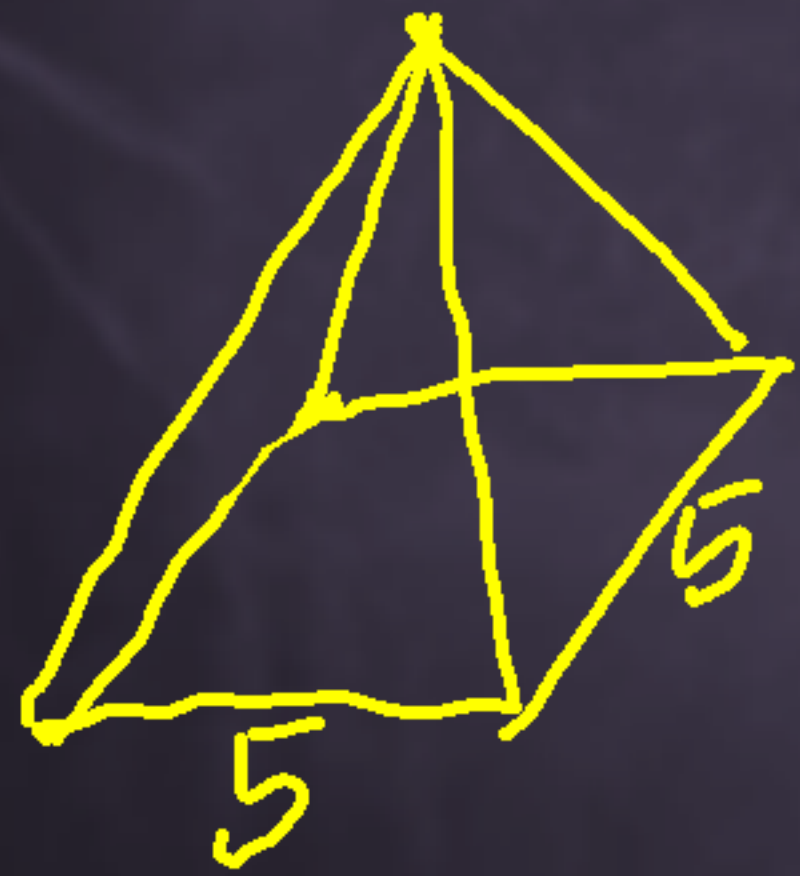
$$\text{พ.ทผิว} = \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 12 \times 10 \right) + (12 \times 12)$$



$$= 240 + 144 = 384 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} Ah \\ &= \frac{1}{3} \times 12^4 \times 8 \\ &= 384 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

4. ขนมหี้นมีรูปทรงเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ยาวด้านละ 5 เซนติเมตร สูง 3 เซนติเมตร จำนวน 120
ห่อ จะมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร



$$\begin{aligned} V_{1 \text{ ห่อ}} &= \frac{1}{3} Ah \\ &= \frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times 3 \\ &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{120 \text{ ห่อ}} &= 25 \times 120 \\ &= 3000 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

5. พีระมิดฐานสามเหลี่ยมมีปริมาตร 96 ลบ.ม. และมีพื้นที่ฐาน 24 ตร.ม. จงหาความสูงของพีระมิด

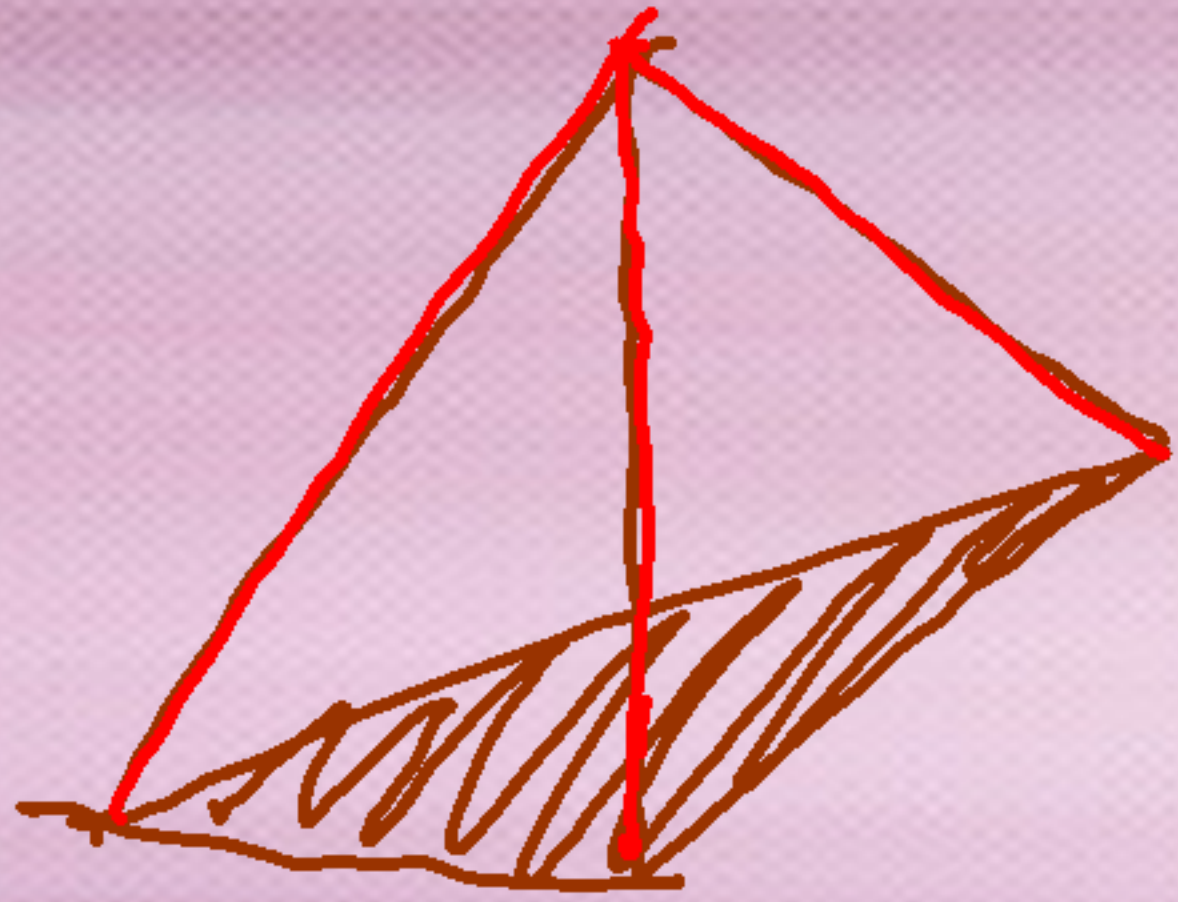
$$V = \frac{1}{3} Ah$$

$$96 = \frac{1}{3} \times 24 \times h$$

$$\frac{96}{8} = h$$

$$h = 12 \text{ ม.} :$$

6. พีระมิดฐานสามเหลี่ยมด้านเท่าสูง 12 นิ้ว มีปริมาตรเท่ากับ $36\sqrt{3}$ ลบ.นิ้ว มีความยาวรอบฐานกี่นิ้ว



$$V = \frac{1}{3} Ah$$

$$36\sqrt{3} = \frac{1}{3} A \times 12$$

$$\frac{36\sqrt{3}}{4} = A$$

$$9\sqrt{3} = A$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$$

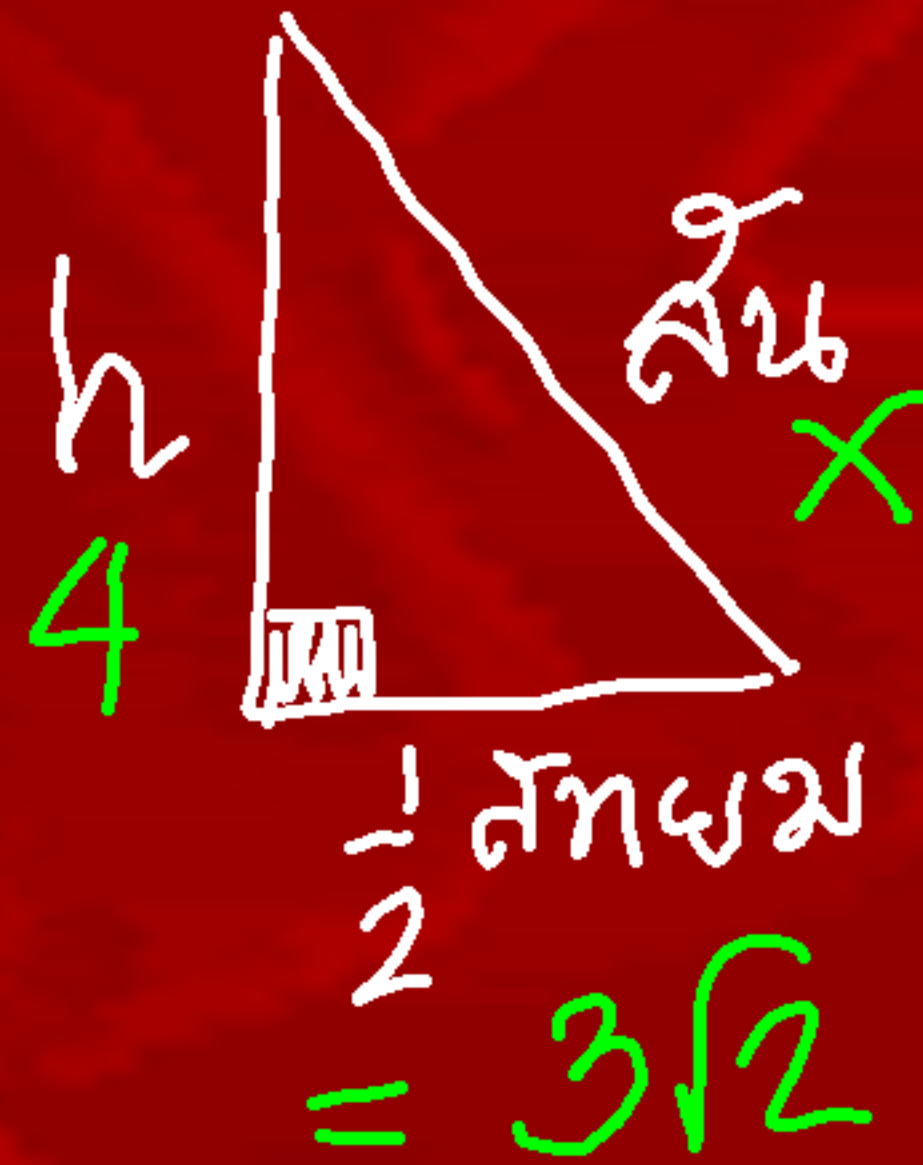
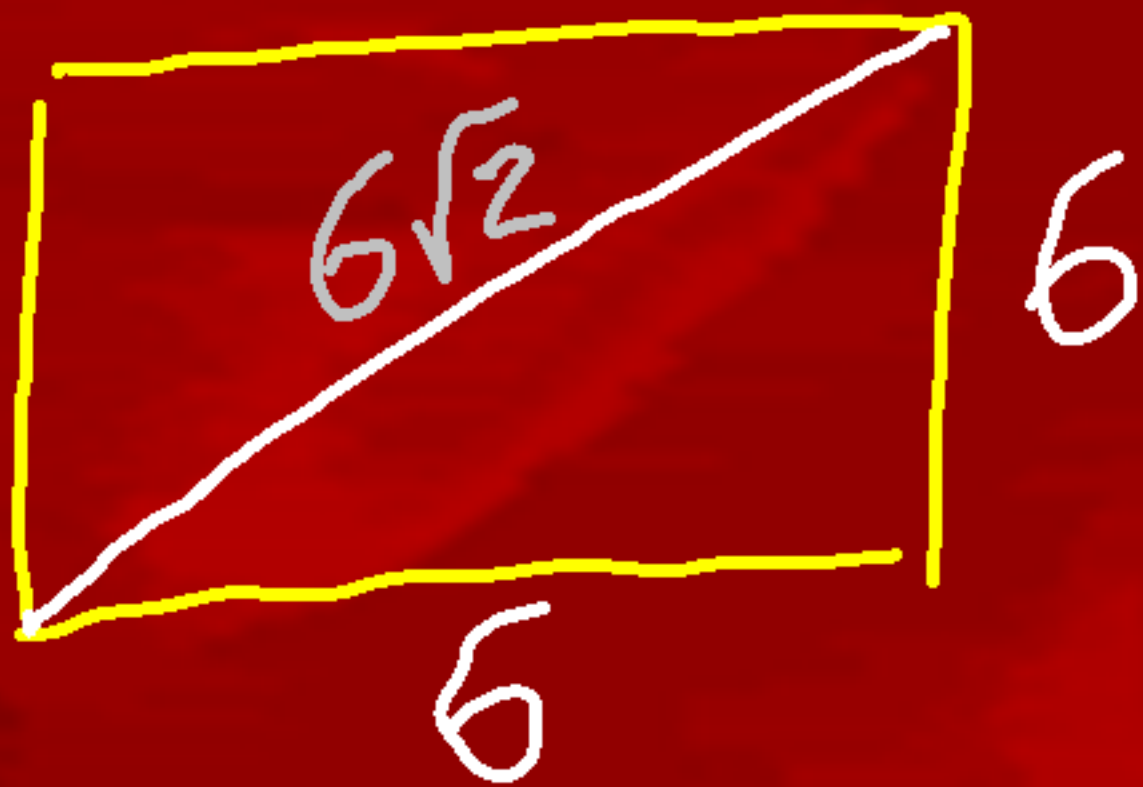
$$9\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$$

$$36 = s^2$$

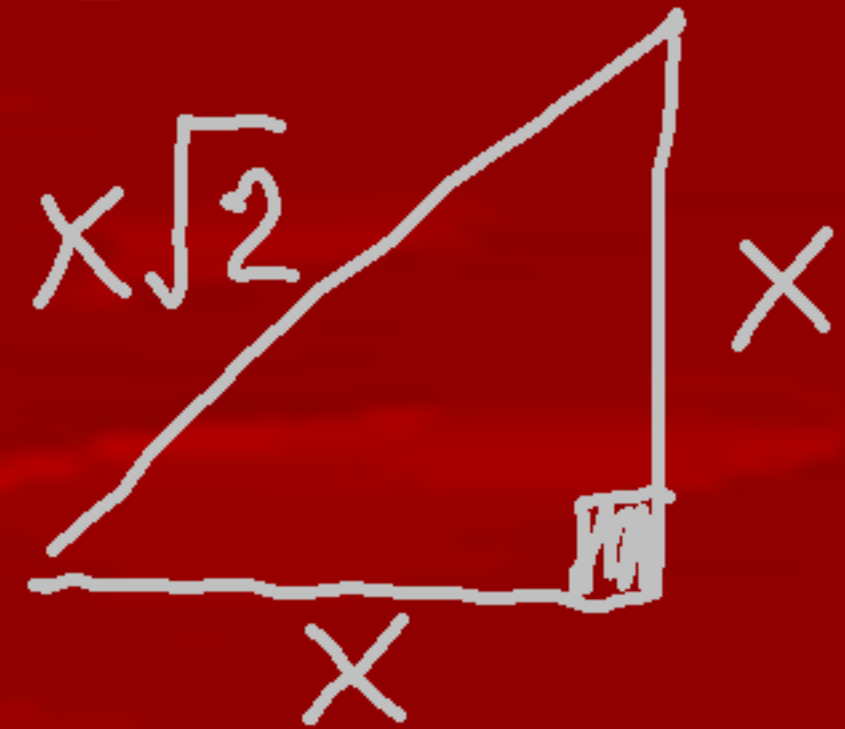
$$\therefore s = 6$$

$$\text{รอบฐาน} = 6 \times 3 \\ = 18 \text{ นิ้ว}$$

7. พีระมิดทรงฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีด้านที่ฐานยาว 6 ซม.
และสูงตรง 4 ซม. จะมีเส้นยาวกี่ ซม.



$$\begin{aligned} x^2 &= 4^2 + (3\sqrt{2})^2 \\ &= 16 + 18 \end{aligned}$$



$$x^2 = 34$$

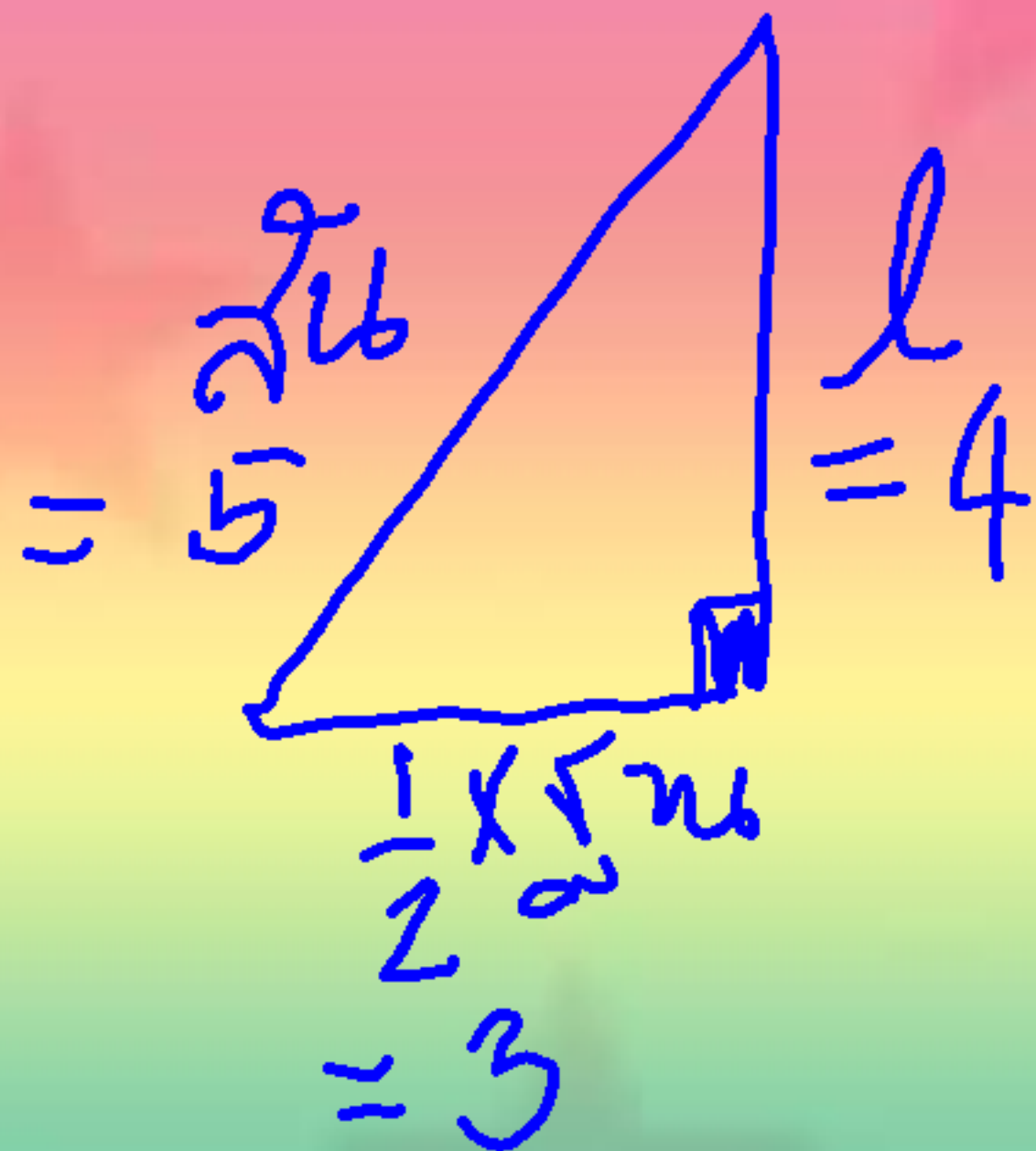
$$x = \sqrt{34}$$

$$\therefore \text{เส้นยาว } \sqrt{34} \text{ ซม.}$$

8. พีระมิดฐานหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีเส้นรอบรูปยาว 36 ซม. และเส้นยาว 5 ซม. มีพื้นที่ผิวทั้งหมดเท่าไร

$$\text{รอบรูป} = 36$$

$$\text{ด้านยาวด้าน: } = \frac{36}{6} = 6 \text{ ซม.}$$

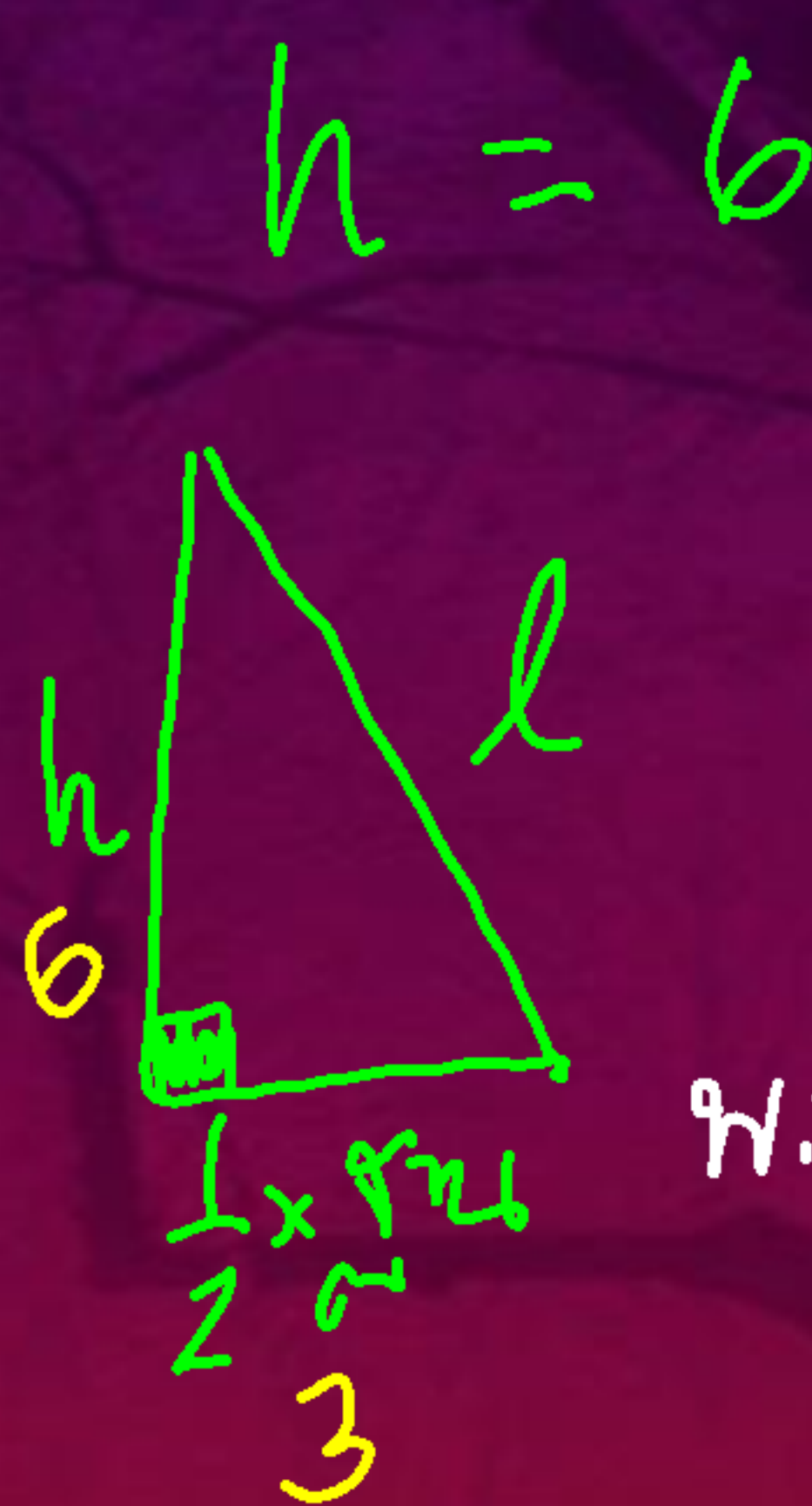


$$\begin{aligned} \text{พ.ทผิว} &= \left(\frac{1}{2} \times 36 \times 4 \right) + \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 \right) \\ &= 72 + 54\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

9. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีพื้นที่ฐาน 36 ตร.ซม.
และมีปริมาตร 72 ลบ.ซม. มีพื้นที่ผิวข้างเท่าใด

$$\begin{aligned} \text{พ.ทฐาน} &= 36 \\ \text{ฐานแต่ละด้าน} &= 6 \\ \text{จากสูตร } V &= \frac{1}{3}Ah \\ 72 &= \frac{1}{3} \times 36 \times h \end{aligned}$$

$$\frac{72}{12} = h$$



$$l^2 = 6^2 + 3^2$$

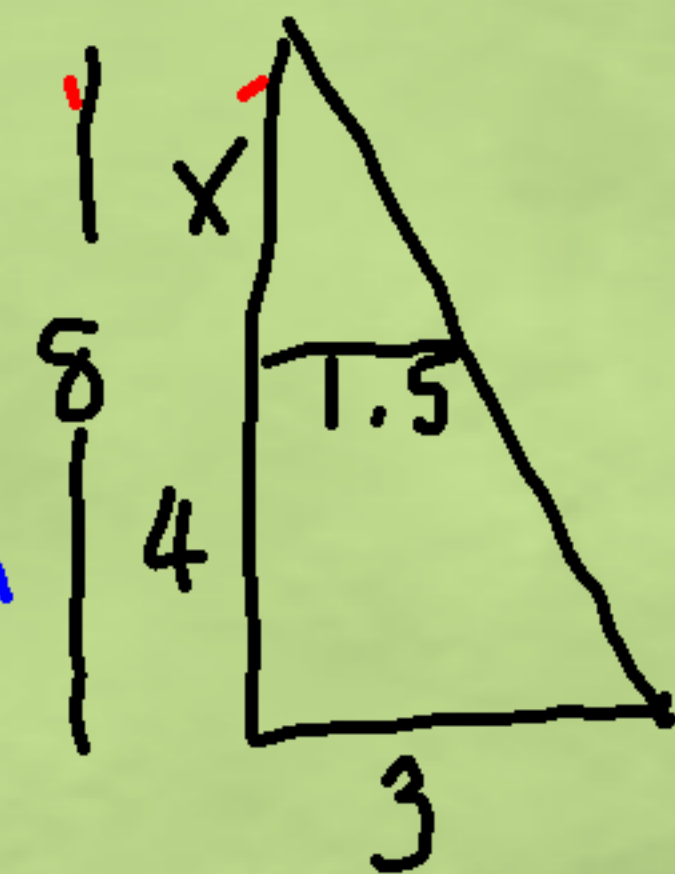
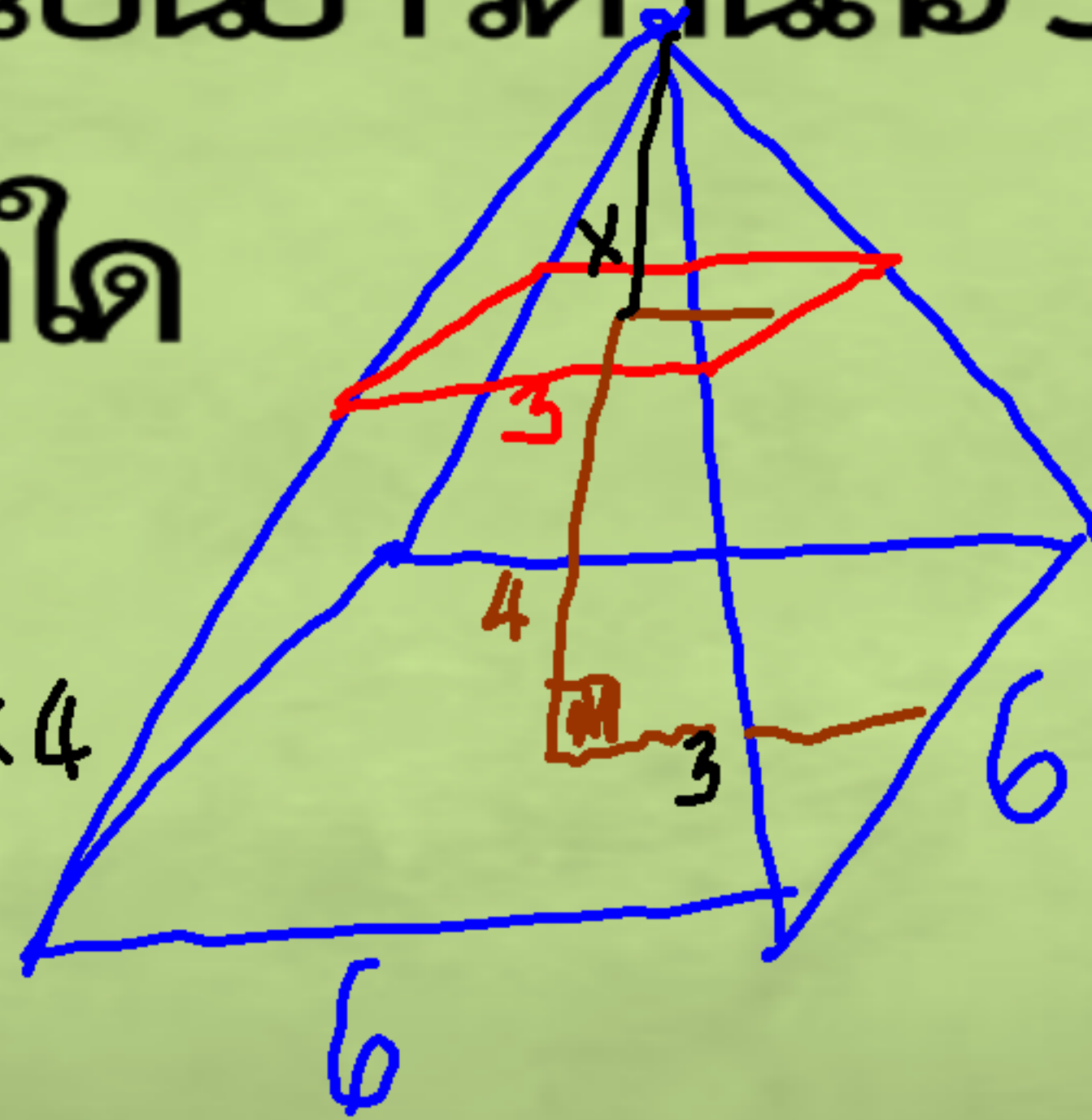
$$= 45$$

$$l = 3\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{พ.ทผิวข้าง} &= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 3\sqrt{5} \\ &= 36\sqrt{5} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

10. พีระมิดตรงตัดปลาย ฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 6 ซม. หลังจากตัดปลายแล้วพีระมิดสูง 4 ซม. และมีความกว้างของด้านบนยาวด้านละ 3 ซม. พีระมิดตัดปลายมีปริมาตรเท่าใด

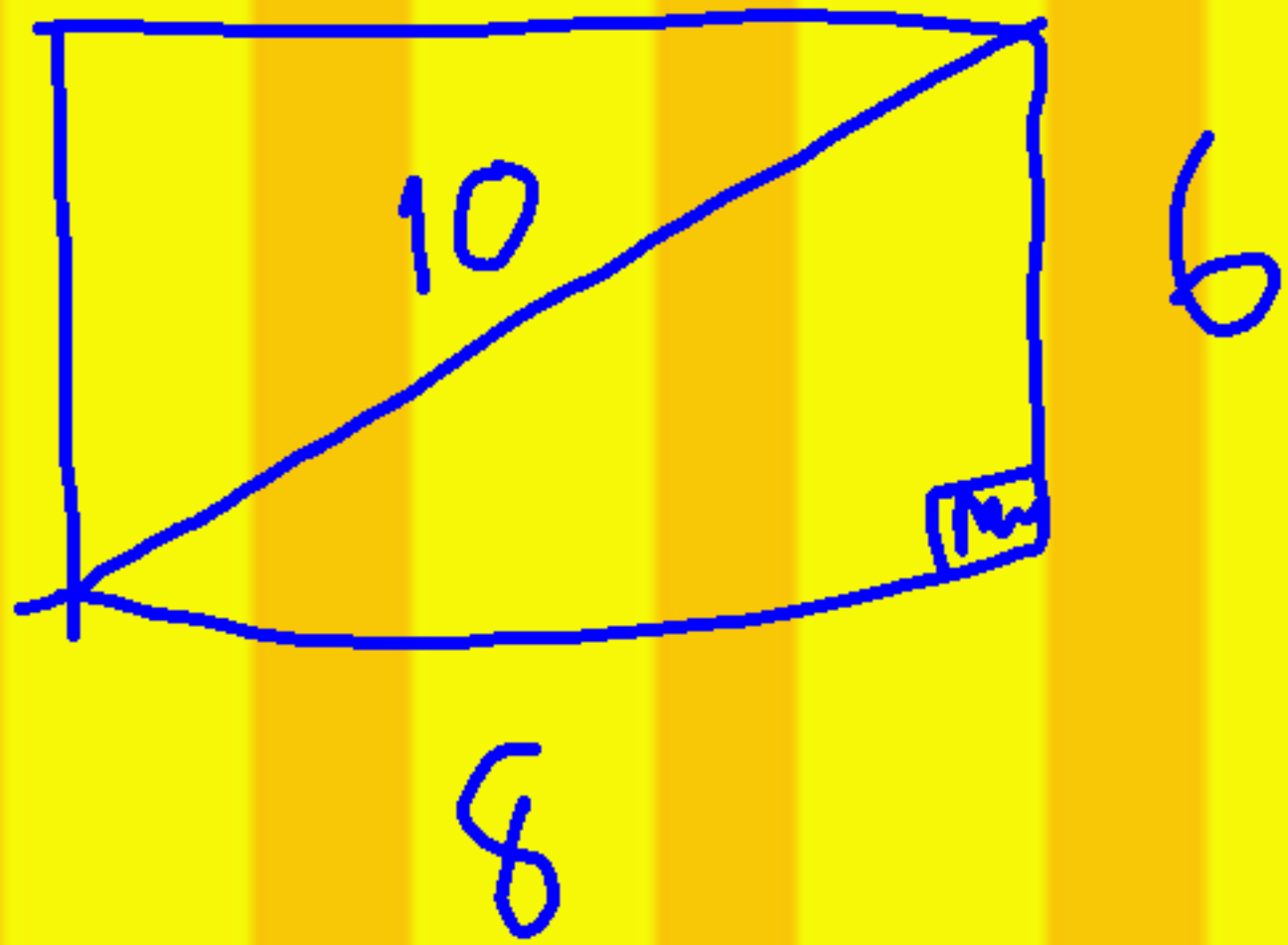
$$\begin{aligned}
 V_{\text{ตัดยอด}} &= V_{\text{ใหญ่}} - V_{\text{เล็ก}} \\
 &= \frac{1}{3} \times 36 \times 8 - \frac{1}{3} \times 9 \times 4 \\
 &= 96 - 12 \\
 &= 84 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$



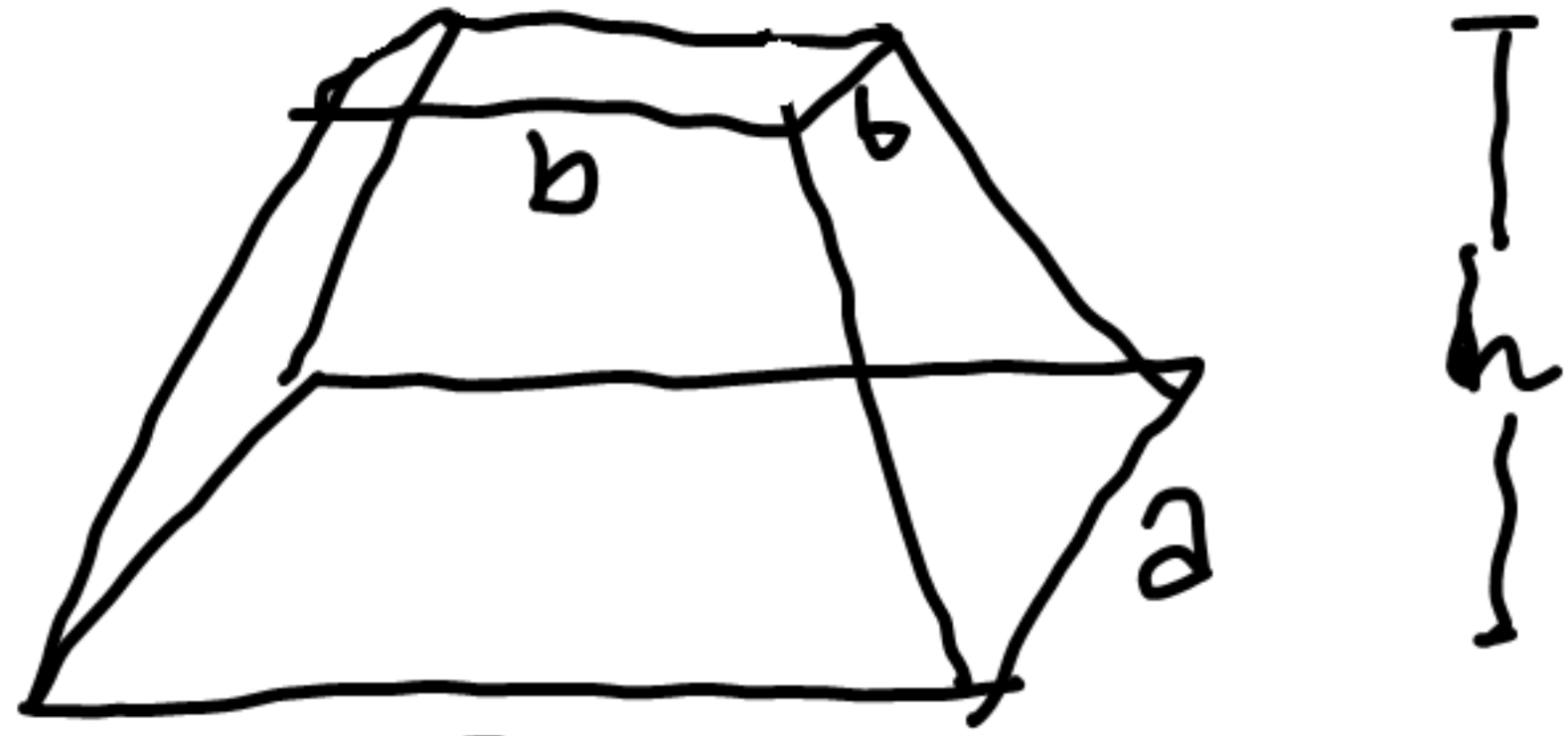
$$\begin{aligned}
 \frac{x}{x+4} &= \frac{1.5}{3} \\
 2x &= x+4 \\
 x &= 4
 \end{aligned}$$

11. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีฐานกว้าง 6 ซม. ยาว 8 ซม. และมีเส้นสูงยาวเท่ากับเส้นทแยงมุมของฐาน มีปริมาตรเท่าใด

$$h = 10$$



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} Ah \\ &= \frac{1}{3} \times 6 \times 8 \times 10 \\ &= 240 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



$$V = \frac{1}{3}h[a^2 + ab + b^2]$$

$$V = \frac{1}{3} \times 4 [6^2 + 6(3) + 3^2]$$

$$= \frac{1}{3} \times 4 \times 21$$

$$= 84 \text{ cm}^3$$